

חדולים תרגומי 11

תרגיל:

נתון כי a_n סדרה כגון $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$, $\{a_{5k}\}$ מתכנסות.
הוכיחו כי $\{a_n\}$ מתכנסת.

פתרון: נכח: $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$, $b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$, $c = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{5k}$ (מהנתון קיימים).

נרמקו ק - $\{a_{5m}\}$ - זו ת"ס של a_{5k} (הצבה $k=2m$)

וכן מירושק $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{5m} = c$. נצבי ש זו ת"ס של a_{2k} (הצבה $k=5m$)

וכן מירושק $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{5m} = a$. נסקנה: $\boxed{a=c}$

כפומה נרמקו ק - $\{a_{5m+5}\}_{m=1}^{\infty}$: $c = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{5k} = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{5m+5} = b$
 $\uparrow$ ת"ס של a_{5k} ת"ס של a_{2k+1}
 $\Leftarrow$ סה"כ $b=c=a$

לפי "סגור הפחוק" משיעור קודם, כיון ש- $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$ שתי ת"ס מתכנסות
 שחצ מכסת את $\{a_n\}$, נקדם $\hat{P}(\{a_n\}) = \{a, b\}$
 $= \{a\}$ $\Leftarrow a_n$ מתכנסת

גרור עדין וגרור תחתון $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n$; $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim} a_n$

משפט: לכל סדרה $\{a_n\}$, מתקיים: $\sup \hat{P}(\{a_n\}) = \max \hat{P}(\{a_n\})$
 כלומר, $\hat{P}(\{a_n\})$ יש איבר מקסימלי.

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ מוצר זהירות העקר חקקי הכי גבוה (המקסימלי) של a_n (נ"ל וזו כוונתו).
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ מוצר זהירות העקר חקקי הכי קטן של a_n .

(!) אם (a_n) מתכנסת $\Leftarrow \overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = \lim a_n$

תרגיל:

נתון שהמ"מ $\boxed{a_n \leq d}$. הוכיחו כי $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq d}$.

פתרון: זו שאלה ת"ס מתכנסת a_{n_k} של (a_n) מתקיים: $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq d$

(ניכוח אחר: אפשר לקרר מכאן את הסדרה a_{n_k} שמתכנסת ל- $\overline{\lim} a_n$ - ק"מ נ"מ).

מהנתון: $\exists N \forall n > N: a_n \leq d$. כיון ש- $\exists N \forall k: k > N \Rightarrow a_{n_k} \leq d$.

$k > N_0 \Rightarrow n_k > N \Rightarrow a_{n_k} \leq d$

וידוע שהמקסימום קיים!

א"ש חסר שיש בעבור לכל $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq d$ כצורה.

כפומה: $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq d} \Leftarrow \boxed{a_n \geq d \text{ ת"מ}}$

תרגיל 2:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d$: $a_n \geq d$ עבור כל n : $a_n \geq d$

הוכחה: נניח $a_n \geq d$ לכל n . נבחר $\epsilon = 1$. אז $a_n \geq d - 1$ לכל n .
 נבחר N כזה ש $a_n \geq d - 1$ לכל $n \geq N$.
 אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq d - 1$.
 מכיוון ש $a_n \geq d$ לכל n , אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq d$.

משפט BW קובע ש $a_n \geq d$ לכל n אם ורק אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq d$.

כפסוק: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq d$ $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: a_n \geq d - \epsilon$
 (אם $a_n \geq d$ לכל n , אז $a_n \geq d - \epsilon$ לכל n .
 הפוך: אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq d$, אז $a_n \geq d - \epsilon$ לכל n מספיק גדול.)

הצגת $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ - ϵ ו N

הוכחה: $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: |a_n - L| < \epsilon$

נניח $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. אז $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: a_n < L + \epsilon$ (1)
 ו $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: a_n > L - \epsilon$ (2)

(1) ו (2) יחד נותנים $|a_n - L| < \epsilon$ לכל $n \geq N$.

הוכחה (הפוכה):

$\Rightarrow$ יהי $\epsilon > 0$. נבחר N כזה ש $a_n < L + \epsilon$ לכל $n \geq N$. אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L + \epsilon$.

לכן: אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, אז $a_n < L + \epsilon$ לכל n מספיק גדול.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: a_n < L + \epsilon$
 (1) $a_n < L + \epsilon$ לכל $n \geq N$.
 (2) $a_n > L - \epsilon$ לכל $n \geq N$.
 אז $|a_n - L| < \epsilon$ לכל $n \geq N$.

סה"כ: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

המשפט: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אם ורק אם $a_n < L + \epsilon$ לכל n מספיק גדול.

המשפט: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אם ורק אם $a_n < L + \epsilon$ לכל n מספיק גדול.

$B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \mid A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

תרגיל 3:

$a \leq b$ אם $A \leq B$ $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N: a_n \leq b_n$

פתרון: נניח $A \leq B$. אז $a_n \leq b_n$ לכל n מספיק גדול.

מקרה א' - $B = +\infty$ בטוח נכון.

מקרה ב' - $B = -\infty$ אז $a_n \leq b_n$ לכל n מספיק גדול.

אם $A = a = -\infty \leq B = -\infty$, אז $a_n \leq b_n$ לכל n מספיק גדול.

המושג חדל'ה דמיוני 11

המשק פתרון תרגיל 3

מקרה א': $B \in \mathbb{R}$: קחו ת"ס a_n המתכנסת ל- A . $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} A$

מתק"ס מהנתון: הנ"ל $a_{n_k} \leq b_{n_k}$: b_{n_k} יש ת"ס מתכנסת ל- B (BW)

נקרא זה $b_{n_{k_l}} \rightarrow d$ מתק"ס: $a_{n_{k_l}} \leq b_{n_{k_l}}$ הנ"ל

$$\downarrow \text{אם חגס נשאר בסדר}$$

$$A \leq d \leq B$$

הזכיר $b_{n_{k_l}}$ ירודה

בגלל 3

לפ' הקרטרון: $\forall \epsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} \forall n > N_1: b_n < B + \epsilon$

בעזר מהנתון: $a_n \leq b_n$: $\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2: a_n \leq b_n$: $N = \max\{N_1, N_2\}$ כה"כ

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N: a_n \leq B + \epsilon$$

מתרגיל 1 נקטו: $\forall \epsilon > 0: \limsup a_n \leq B + \epsilon$
 $\downarrow$ לפ' הנחה מתרגיל קודם
 $A = \lim a_n \leq B$

כאלה סיומנים:

$$a + b \leq \liminf (a_n + b_n) \leq a + B \leq \limsup (a_n + b_n) \leq A + B$$

טענה:

(עזרה בתרגיל בית)

$$a \cdot b \leq \liminf (a_n \cdot b_n) \leq a \cdot B \leq \limsup (a_n \cdot b_n) \leq A \cdot B$$

טענה: עבור $0 \leq a_n, b_n$:

הוכחה 1: אם $a = 0$ או $b = 0$ - ברור (הסברות א' נשזרות וכן זה הניסוח...)

אם $a > 0$ או $b > 0$: $a_n \cdot b_n \leq (a + \epsilon)(b + \epsilon)$: $a_n > a - \epsilon$: $b_n > b - \epsilon$: $a_n \cdot b_n > (a - \epsilon)(b - \epsilon)$

נפתור ל- a, b ספייס, $a, b > 0$:

לכ $\epsilon_1 > 0$ (קטן מספיק) : הנ"ל $a_n > a - \epsilon_1$: $b_n > b - \epsilon_1$: $a_n \cdot b_n > (a - \epsilon_1)(b - \epsilon_1)$

הנ"ל $a_n > a - \frac{\epsilon}{b}$: ברצות ל- $\epsilon > 0$ קטן מספיק, הנ"ל $b_n > b - \frac{\epsilon}{a}$:

$$\liminf (a_n b_n) > ab$$

$$\leftarrow \text{הנ"ל} \quad a_n \cdot b_n > (a - \frac{\epsilon}{b})(b - \frac{\epsilon}{a})$$

$$= a \cdot b - \frac{\epsilon}{b} b - \frac{\epsilon}{a} a + \frac{\epsilon^2}{ab} > ab - 2\epsilon$$

הוכחה 2 :

לכ $\epsilon > 0$ קי"מ ת"ס $a_{n_k} \leq a + \epsilon$ - כך ש- $a_{n_k} \leq a + \epsilon$ (כי a עקוב חסר).

כמו כן, הנ"ל: $b_n \leq B + \epsilon$ (הקטרין ל- $\limsup b_n$ קטרס, הנ"ל) : $b_{n_k} \leq B + \epsilon$

$$a_{n_k} \cdot b_{n_k} \leq (a + \epsilon)(B + \epsilon) = aB + \epsilon(a + B + \epsilon)$$

$$\limsup (a_n b_n) \leq \limsup (a_{n_k} b_{n_k}) \leq aB + \epsilon(a + B + \epsilon)$$

$$\limsup (a_n b_n) \leq aB$$

3. lim, lim se inden

גורס $\lim a_n + \lim b_n = \lim (a_n + b_n)$ קבוצה, $\forall$ חוק שוויון זרע חיסוק.

$$\underline{\lim} (-a_n) = -\overline{\lim} a_n \quad ; \quad \overline{\lim} (-a_n) = -\underline{\lim} a_n \quad : \text{증명}$$

$$\lim \left(\frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{\lim a_n} \quad a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim \lambda a_n = \lambda \lim a_n$$

הוכחה: (נקודה רביעית) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$(\frac{1}{L} \in \hat{P}(G_{an}^{1,2})_{PS}) \quad \frac{1}{a_{n_k}} \rightarrow \frac{1}{L} \quad \text{לפי } \text{משפט } a_{n_k} \rightarrow L \text{ וזהו } \square$

תהי $\{a_n\}$ מתכנסת. $\{ \frac{1}{a_n} \}$ ו $\{ \frac{1}{a_{n+1}} \}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$

$$\boxed{P \leq \frac{1}{L} \Leftrightarrow L \leq \frac{1}{P} \Leftrightarrow \frac{1}{P} = \lim_{m \rightarrow \infty} C_{1m} = P \leq \frac{1}{L} : \text{B3}}$$

* למה: הלא $a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ונתון $a_n \leq \epsilon$ ונתון $a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

תשובה: כל $a \in A$ (אנחנו מניחים) יוצר מתחום (a)

$$a_n \rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{folgt}$$

$$\sup K \leq \limsup K \leq$$