

תדו"ת שיטות 9

תכונות: $\mathbb{R} \ni P(a_n)$ - קבוצת כל הפונקציות $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ו- a_n .

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \min P(a_n) \quad ; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \max P(a_n)$$

הצגה: תת קבוצה חסומה $B \subseteq \mathbb{R}$ נקראת סגורה (כמותית) אם כאשר

$$x_n \in B \quad \forall n \quad \text{ו-} \quad x_n \rightarrow x \quad \text{אז} \quad x \in B$$

דוגמה: $[0,1]$ סגורה אבל $(0,1)$ לא כי נטש $x_n = \frac{1}{n}$ ו- $x_n \rightarrow 0$ אבל $0 \notin (0,1)$

משפט: תהי (a_n) סדרה חסומה, אזי קבוצת הפונקציות $P(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ הינה קבוצה סגורה.

דוגמה: נבדוק שיש לנו תת סדרה שממנה קיבלנו B סגורה וחסומה יש זה מקובל (היננו חסומים).

הוכחה: תהי (a_n) סדרה (של פונקציות חסומות), ונניח שיש לנו מתכנסות

$$b \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b_k \quad \text{כאשר} \quad b_k \in P(a_n) \quad \forall k \quad \text{ו-} \quad b \text{ שגור חסומה}$$

מהנחות, נסא קיימת תת סדרה (a_{n_k}) ששואפת ל- b_k ($a_{n_k} \rightarrow b_k$)
 $(a_{n_k} \rightarrow b_k \quad \forall k \quad \text{כאשר} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k > N : |a_{n_k} - b_k| < \varepsilon)$

נבדוק מהתכנסות $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b_k$ קיים $m_0(k)$

$$\text{כך שכל } m > m_0(k) \text{ מתקיים } |a_{n_m} - b_k| < \frac{1}{k}$$

כעת נבדוק האילווקציה סדרת טקסטים $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$

נבחר $m_1 < m_2$. כעת נבחר $m_2 > m_0(2)$ ו- $n_{m_2} > n_{m_1}$

האילווקציה נבחר $m_k < m_{k+1}$ ו- $n_{m_k} > n_{m_{k-1}}$

קייסנו סדרה $n_k = n_{m_k}^{(k)}$ קיים: $\exists$ היא סדרה $\exists$ טקסטים

$$\begin{aligned} a_{n_k} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \\ \Downarrow \\ b &\in P(a_n) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} b_k - \frac{1}{k} &< a_{n_k} = a_{n_{m_k}} < b_k + \frac{1}{k} \\ \Downarrow k \rightarrow \infty & \\ b & \end{aligned} \quad \text{כאשר}$$

הצגה: * עובדה נדירה למעשה (infinitely often) אם היא מתקיימת ל- ∞ לאנטי הצגה.

* עובדה מתקיימת "כמעט תמיד" (almost everywhere) אם היא מתקיימת לכל הטורים החסומים.

ממקום מכונים.

דוגמה: $(1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,\dots)$ $a_n = 1$ שכיח $a_n \neq 3$ כמעט תמיד $a_n = 3$ לא שכיח

טענה: תהי (a_n) מסומה.

$$\forall \varepsilon \quad a_n \leq L + \varepsilon \quad (1) \iff L = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\forall \varepsilon \quad L - \varepsilon < a_n \quad (2) \quad \text{כמעט תמיד}$$

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ נניח ש- $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$. הפירט, L שבור חזק. הפירט, $\forall \varepsilon < \infty$

המאורע $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ שכיח, כי יש שם זנב שו תת".

כמו כן עניינה שמהאורע $a_n \leq L - \varepsilon$ קורה רק מספר סופי (אויס)

ש פסגים. נניח הסעיף שיהיה $\varepsilon < \infty$ ק שבור ∞ מאקרי הסדרה

$a_n \leq L - \varepsilon$. מתוך ∞ האברים (הנני ניתן זכור תת"ס מתקפת (פי BW)

מאמר $a_{n_k} \rightarrow \ell$, ובהנחה מהשואה $\ell \leq L - \varepsilon$ הסתירה

דבר $L = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ ש- $\checkmark$

$$\Rightarrow \quad N - (1) + (2) \quad a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \quad \text{שכיח} \quad \boxed{\text{(שכיח, כמעט תמיד = שכיח)}} \\ \Downarrow \\ L \in P(a_n)$$

מ- (2) ניתן להתחיל הסעיף שיש זכור הן ממנו וזה צ"ק צהדים לסתירה...

סדרות קושי - Cauchy

הצבה: מאמר שסדרה (a_n) מקיימת את קריטריון קושי אפי:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{לכל } \varepsilon > 0 \quad \text{קיים } N \text{ כזה שכל } n, m > N \text{ (כזה אפשרי, זכור על מידה)}$$

אומרים ש- (a_n) היא סדרת קושי.

משפט: סדרה a_n מתכנסת $\iff$ (בזכות ספי) היא מקיימת את קריטריון קושי.

דוגמה: $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$. (סדרה שפניא מתכנסת את קריטריון קושי).

$$(m > n) \quad a_m - a_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} =$$

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

כן אם נבחר $N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, אז כושר $n > N_0$ $|a_m - a_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

כל הסדרה מקיימת את קריטריון קושי ונסיק שפניא מתכנסת.

המשך תז"א שיעור 9:

הכרחי והמספיק: a_n מתכנסת $\Leftrightarrow a_n$ סדרת קושי.

למה עזרי: יהי (a_n) סדרת קושי אזי a_n חסומה.

הוכחת (כאמרי): מקיום הקריטריון עבור $\varepsilon=1$, קיים N_0 כך שזו $n < m$.

$$|a_m - a_n| < 1 \quad \text{כפרט, אם } n < m \text{ מתקיים: } |a_{N_0+1} - a_n| < 1$$

$$\Downarrow \\ a_m \in (a_{N_0+1}-1, a_{N_0+1}+1)$$

$$\text{נקח } M = \max\{a_1, a_{N_0}, a_{N_0+1}+1\} \text{ כחסם משיי}$$

$$\text{וכן } m = \min\{a_1, \dots, a_{N_0}, a_{N_0}-1\} \text{ כחסם מינימי.}$$

הוכחת המספיק:

($\Leftarrow$)

הכיוון הפוך: נניח $a_n \rightarrow L$ ונראה a_n מקיימת קריטריון קושי.

$$\text{יהי } \varepsilon > 0. \text{ לפי ההצטרף (הצטרף קושי) } N_0 \text{ כך שזו } n > N_0: |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{וכפרט אם } n, m > M: |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

אם משיי

כבר ש!

($\Rightarrow$)

הכיוון הפחות קל: נתונה a_n שמקיימת קריטריון קושי, ונראה (העזר a_n מתכנסת).

$$\text{אכן } n - BW \text{ ישנה תת-מתכנסת, נבחר } a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L$$

יהי $0 < \varepsilon$.

$$\text{יהי } N_0 \text{ כך שזו } n, m > N_0: |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{יהי } n_0 \text{ כך שזו } k < k_0: |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{כעת נקח } N_0 = \max\{N_0, n_{k_0}\}, \text{ ואז אם } n < N_0 \text{ נבחר איבר מתת-}$$

$$\text{קושי } n_{k_1} > N_0 \text{ וזו } n_{k_1} \text{ (אפשר לעשות זאת כי } a_n \text{ סדרת קושי שטבע"י)}$$

$$\text{ואז: } |a_n - L| \leq |a_n - a_{n_{k_1}}| + |a_{n_{k_1}} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

צדמאות

$$\textcircled{1} \text{ נציג } a_n \text{ כסדר (הצטרף: } a_{n+1} = a_n + \cos(a_n) \cdot 2^{-n} \text{) נראה שזו מתכנסת.}$$

$$\text{יהי } 0 < \varepsilon, \text{ יהיו } n < m$$

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)| \leq |a_m - a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| =$$

$$= |\cos(a_{m-1}) \cdot 2^{-m+1}| + \dots + |\cos(a_n) \cdot 2^{-n}| \leq 2^{-m+1} + \dots + 2^{-n} =$$

$$= 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < 2^{-n} \cdot 2 < \varepsilon$$

$$\downarrow \text{כאשר } n \rightarrow \infty \Rightarrow m > n > N_0(\varepsilon)$$

$$\sum_{j=0}^m q^j = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

(2) נראה בעזרת קריטריון קושי שהסדרה (הנאה) היא מתכנסת:

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

היא סדרה עולה זקן קצב נכיה שטא שטאפת $-\infty$ (+)

פתרון: (!!) $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0$ אכזבא מנאה (ותכנסת) !!

נכתב $n > m = 2n$:

$$|a_{2n} - a_n| = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n \text{ איברים}} \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

נכון $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ותמיד יהיו צד איברי שרחוקי יותר מ- $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Leftarrow$ קיבלנו שהסדרה לא מקיימת את קריטריון קושי עבור $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, הפרט:

לא מתכנסת!