

ח דו"ח - שט"ע"ו 8

גבוהות חזק"ם

העצרה: $x \in [-\infty, \infty]$ נקרא **ערס** חסר a_n כ p ק"מ חסר $a_n \rightarrow x$.

* טענה: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

הוכחה: $\Rightarrow$ $\text{plc} \rightarrow +\infty \exists a_n \in K$ כזו, a_n 'כוכה' להיות חסומה M . δ .

הערה $(\Leftrightarrow)$ מכיוון ש- a_n איננה חסומה מלמעלה, קיים איבר בסדרה שגדול מ-1. $a_{n_1} > 1$.

מכיוון ש- a_n אינה חסומה מעל, קיים סדר נובל בסדרה, העל אינזקס N_1 .

$(a_{N_2} \approx 1, N_2)$ 2-N 513(7)

$$(a_m \neq k : n \neq k) \text{ SSS}$$

ממשית. באינדוקציה, נסתכל בת"ס a_{n_k} ו- $a_{n_{k+1}}$ - ע"פ a_{n_k} ושל $a_{n_{k+1}}$. $a_{n_k} \rightarrow +\infty$

* מסקנה (BW-M): שם סדרה יש גבול חזק!

* קריטריון: L היינו אסות חזקי של $a_n \Leftrightarrow$ זא כדע הקע' $\{ \varepsilon | a_n - L | < \varepsilon \}$ אינאפאט הינה

(הוכחה: $\Leftarrow$) כי L הוא Σ_1^1 חזקו $\exists n_{\vec{k}} L \Leftarrow \exists p$ כפיט ω סדע ק"פ $N_0 \in N$

$\exists \epsilon > 0$ such that $|a_n| < \epsilon$ for all $n \geq N$.
 If $a_n = 0$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

($\Rightarrow$) קשה. נניח כי α מזהה הקב' $\{ \epsilon < |a_n - L| < n \}$ הינה אינסופית ונבדוק תת"ס $a_{n_k} \rightarrow L$.

במידה אינדיקטורית: $\exists k_1 \in \mathbb{N} : L-1 < a_{n_1} < L+1$

$$L - \frac{1}{2} < a_{n_2} < L + \frac{1}{2} \quad \text{ע"ש: } n_2 > n_1 \quad \text{פ"ק, נ"ק}$$

סאינדוקציה בונים תת"ס A_n כ $A_n \subset L + \frac{1}{n}$ ו $A_n \subset L - \frac{1}{n}$ $\Rightarrow A_n \subset L$

ס'מ"ו: P קבוצת העסקות החתומים המשניים של a_n .

$\hat{P}$ קבוצת כל האצטיות החזקת P של a_n .

$$P = fS, \text{ also } \frac{P}{n} = fS \quad \text{: 218G} \quad a_n = \begin{cases} 5 \text{ rish} : 1 \text{ WP13} \\ n \text{ rish} : 1 \text{ n} \end{cases}$$

פ. ש. ר. נ.

$\mathcal{P}(a_n) = \{M_1, M_2, \dots, M_{50}\}$ סדרת תת'ם כן של $M_1, M_2, \dots$
 פונקציה קב' כופת של מכס'

$$a_n = 1 + \frac{2n+3}{2n+5} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad \text{: 708 P 113 N 2}$$

שעור: a_n מתכנסת $\Leftrightarrow$ יש זה שמת חתך יחיד והוא סופי

ה/כח: (←^ק) י' צ' מ' חסר.

($\Rightarrow$) נניח כעת $L = \emptyset$ היינו הצגנו החזקה היחידה של a_n ונראה

על $a_n \rightarrow L$ (כאשר a_n מתכנס ל- L)

. $\forall n \in \mathbb{N} |a_n| < M$ על כן M פ"ק ל" a_n ". הוכחה אנ - על סך שיש, כאשר,

(הסבר: הטענה הראשונה שהוכחו היום)

• $\exists \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists N_0 \in \mathbb{N} : |a_n - L| > \epsilon \quad : a_n \not\rightarrow L$ ונפרד מנ

כפוף, $q, M \propto \chi$ כדור פבצרה שגמור

כל ישרון סליח בדין - $[-M, L-E]$ - $[L+E, M]$

נניח שיש ∞ אברים ב- $[L+\varepsilon, H]$. "נסבירותם גבוהה יותר מ-0"

$$\exists a_{n_{k_2}} \rightarrow L' \quad \text{BW} \quad \text{as} \quad \exists a_{n_{k_2}} \text{ s.t. } a_{n_{k_2}} \in [L+\varepsilon, M] \Leftarrow$$

אמת ק"ס $L + \epsilon \leq L' \leq M$ ו-13 סתירה לך L -0 הוא ϵ מסו' 3.

$$\left[\begin{array}{l} +\infty : \text{חסר חסר} \iff a_n \rightarrow +\infty \\ -\infty : \text{חסר חסר} \iff a_n \rightarrow -\infty \end{array} \right] \quad \text{הנחיה:}$$

$\otimes$ מרחב אנדורפיזמים A_n על V $\otimes$

הערה: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n) = \sup P(a_n)$ (פס) +BW אקסיומת הלימית

$$\underline{\lim} = \liminf(a_n) = \inf P(a_n)$$

סעיף: זהו a_n חסמה אפי אקסוצה העקוזה הרקייס $\phi(n)$

יש $\max$ -! $\min$ וכן מתק"ס:

$$\max P = \limsup(a_n) = \inf_n \sup \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

$$\min P = \liminf (a_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$$

(הפצרה דמקורית קבומה)

שאלה: $\mathbb{Z}$ הינה כפרה חסומה וזרבת (גו פזץ $\sup$ מפרות איתרים.)

← שם משמש לזיון היא מתחבת $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ אינפיניטום שלר.

$$(z \in \underline{P} \wedge \forall p \in \underline{P} \quad p \leq z \quad \text{B1 B2}) \quad z = \max \underline{P} \quad \text{B3 B4}$$

$$a_{n_k} \leq z_{n_k} \text{ for } \exists N. \exists a_{n_k} \rightarrow p \iff p \in \underline{P} \quad (1)'$$

$(z \leftarrow a_{n_k} \text{ on } 13N) \text{ (5)} \quad z \in P(a_w) - \emptyset \text{ on } 13N) \text{ (2)}$

$$(n_k > K_{k-1})$$

משפט בארד-הרשקוביץ: $\sup_{a_{n_k}} \leq K \cdot \sup_{a_n}$.

$$Z_{n_k}^k \geq a_{n_k} \geq Z_{n_k} - \frac{1}{k} \quad - \text{e p}$$