5/11/13

חדו"א - שיעור 7

⊛ תזכורת: • סדרה עולה וחסומה מלעיל מתכנסת ל- $\sup\{a_n\}$

• סדרה יורדת וחסומה מלרע מתכנסת ל- $\inf\{a_n\}$

• סדרה עולה ולא חסומה $\to +\infty$

• סדרה יורדת ולא חסומה $\to -\infty$

⊛ $e := \sup(1+\frac{1}{n})^n = 2.78\ldots$ ← בתרגול ראינו $(1+\frac{1}{n})^n \le 3$ חסומה

← בתרגול נראה $(1+\frac{1}{n})^n$ עולה (נתון ע"י בינום).

תת-סדרות

<u>הגדרה</u>: תהי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נאמר שהסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ היא <u>תת סדרה</u> של (a_n) אם: <u>קיימת</u> סדרה <u>עולה ממש</u> של מס' <u>טבעיים</u> $n_1<n_2<n_3<n_4\ldots$ $[(n_j)_{j=1}^{\infty}$ $n\in\mathbb{N}$ $n_{j+1}>n_j]$ כך ש- $b_j=a_{n_j}$

<u>למשל</u>: $a_n=(-1)^n$, $\forall n\ b_n=1$ אזי, b_n זו תת"ס כי: $n_j=2j$ עולה ממש ומתקיים: $b_j=a_{n_j}=a_{2j}=(-1)^{2j}=1$

<u>הערות</u>: ⊛ עבור $n_j=j+1$ נקבל: $b_n=a_{n+1} \Leftarrow a_{n+1}$ היא תת"ס של a_n

a_{2n} היא תת"ס של a_n

באופן כללי, עבור n_j סדרת טבעיים עולה ממש a_{n_j} היא תת"ס של a_n.

<u>משפט הירושה</u>: תהי a_n סדרה ! - a_{n_k} תת-סדרה שלה

(1) אם $a_n \xrightarrow{n\to\infty} L$ אז גם $b_k := a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} L$

(2) אם a_n <u>חסומה</u> (מלרע/מלמעלה/משניהם) אז גם a_{n_k}

(3) אם a_n <u>מונוטונית</u> (עולה/יורדת) אז גם a_{n_k}

<u>הוכחה</u>:

(2) נתון $m\le a_n\le M$ $\forall n$ ובפרט: $m\le a_{n_k}\le M$ $\forall k$:
איזשהו אינדקס n

(1) נתון לכל $\varepsilon>0$ קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$ $|a_n-L|<\varepsilon$.

נב"ט הסדרה (a_{n_k}). משום ש- n_k עולה ממש, קיים K_0 כך ש- $n_{K_0}\ge N_0$

(תמיד קיים כי: $n_k\ge k$ אז נמשש $n_{N_0}\ge N_0$) ואז לכל $k>K_0$ גם $n_k>n_{K_0}\ge N_0$

ואז מהנתון $|a_{n_k}-L|<\varepsilon$ כרצוי.

(3) נ.נ.ח a_n עולה. יהיו $k_1<k_2$ אזי $n_{k_1}<n_{k_2}$

ולכן $\underbrace{a_{n_{k_1}}}_{\text{האיבר ה-}k_1} < \underbrace{a_{n_{k_2}}}_{\text{האיבר ה-}k_2}$ כנדרש.

<u>דוגמאות לשימוש</u>: * $a_{n^2} := (1+\frac{1}{n^2})^{n^2} \to e$ כי $a_n=(1+\frac{1}{n})^n \to e$

* $2^{n/2^n} \xrightarrow[\text{הוכח}]{} 1$ כי $a_n = n^{1/n} \xrightarrow[\text{הוכח}]{} 1$ ולכן $a_{2^n} = (2^n)^{1/2^n} = 2^{n/2^n}$

משפט בולצאנו ויירשטראס:

<u>מטרה</u>: לכל סדרה יש תת"ס מונוטונית (עולה או יורדת)

<u>טענת עזר</u>: תהי סדרה a_n. אם לסדרה אין איבר מקסימלי

אז יש לה תת-סדרה עולה (ממש). (<u>מסקנה</u>: אם לסדרה אין תת"ס עולה אז <u>יש</u> לה איבר מקס')

<u>הוכחה</u>: נבנה את תת-הסדרה בצורה אינדוקטיבית.

$n_1=1$ ($a_{n_1}=a_1$). את n_2 נגדיר כך: a_{n_1} איננו $\max\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

לכן <u>קיים</u> איזשהו אינדקס, נסמן אותו n_2, כך ש- $a_{n_2}>a_1=a_{n_1}$ הגדרנו את a_{n_2}.

נניח שהגדרנו $a_{n_1} \dots a_{n_k}$ ($n_1<n_2<\dots<n_k$) ונגדיר את $a_{n_{k+1}}$ צ"ל נבחר $n_k<n_{k+1}$.

נביט ב: $M_k=\max\{a_1,a_2,\dots,a_{n_k}\}$. M_k הוא ערך של

איבר בסדרה (a_n) ולכן הוא לא $\max\{a_n\}$ (כי אין לה <u>max</u>), אז

נגדיר את $a_{n_{k+1}}$ כך ש- $M_k<a_{n_{k+1}}$. בפרט $n_k<n_{k+1}$.

וכך קיבלנו (באינדוקציה) סדרה עולה של טבעיים $n_1<n_2<\dots<n_k<n_{k+1}<\dots$

כך ש- $a_{n_{k+1}}>a_n$. צ"ל תת הסדרה המתאימה הינה <u>עולה</u> ∎

<u>משפט</u>: לכל סדרה יש תת"ס מונוטונית (עולה או יורדת)

<u>הוכחה</u>: אנו נניח שאין לסדרה (a_n) תת"ס עולה ממש ונוכיח שאז יש

לה בהכרח תת"ס יורדת חלש (וזה יוכיח את המשפט).

בעזרת טענת העזר אנחנו יודעים שיש ל-$\{a_n\}$ איבר מקסימלי.

נסמן אותו ב- $a_{n_1}=\max\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. כך הגדרנו את n_1.

נביט בסדרה ה"חדשה": $(a_{n_1+1},a_{n_1+2},\dots)$, בוודאות אין לה תת"ס עולה ממש

(כי אז גם ל-a_n הייתה תת"ס עולה בניגוד להנחה) ואז מטענת העזר יש לה איבר

מקסימלי. נסמן אותו: a_{n_2}. כך הגדרנו $n_1<n_2$. כמובן $a_{n_1}\geq a_{n_2}$.

נגדיר באינדוקציה מהנחת $n_1<n_2<\dots<n_k$ כך ש- $a_{n_1}\geq\dots\geq a_{n_k}$ את $n_k<n_{k+1}$

להיות האיבר המקסימלי בתת"ס $(a_{n_k+1},a_{n_k+2},\dots)$ שאין לה תת"ס עולה, כך קיבלנו את הדרוש. ∎

המשך תדא 7

<u>מסקנה - משפט בולצאנו ויירשטראס:</u> לכל סדרה <u>חסומה</u> a_n יש תת"ס <u>מתכנסת</u>.

<u>הוכחה</u>: בהינתן a_n חסומה, נמצא לה לפי המשפט האחרון תת"ס מונוטונית (עולה או יורדת) $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך שהיא גם חסומה (מ-ירושה).
סדרה מונוטונית וחסומה $\Leftarrow$ מתכנסת. צ"ל קיים $L\in\mathbb{R}$ $a_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}L$.

<u>משפט בולצאנו ויירשטראס המוכלל:</u> לכל סדרה a_n יש תת"ס שמתכנסת במובן הרחב (סופי או אין סופי).

<u>הוכחה נוספת - "אריה במדבר":</u>

<u>טענה: הלמה של קנטור על קטעים מקוננים:</u> תהינה (a_n) ו-(b_n) סדרות שמקיימות $a_n\le b_n$. נסמן $I_n=[a_n,b_n]$ ונניח כי:

1) הקטעים מקוננים צ"ל $I_{n+1}\subseteq I_n$ (צ"ל $a_{n+1}\ge a_n$; $b_{n+1}\le b_n$)
2) אורך הקטעים $\to 0$ צ"ל $(b_n-a_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

אזי קיימת נקודה <u>יחידה</u> C כך ש- $\{C\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

<u>הוכחת הטענה:</u>
תנאי 1 מבטיח ש-a_n עולה, כמו כן היא חסומה מלעל למשל ע"י b_1. לכן היא מתכנסת. נסמן $a=\lim_{n\to\infty}a_n$ (ידוע $a=\sup\{a_n\}$)
בדומה הסדרה b_n יורדת וחסומה מלרע למשל ע"י a_1 ולכן היא גם מתכנסת. נסמן $b=\lim_{n\to\infty}b_n$ (ידוע $b=\inf\{b_n\}$)
מתנאי 2: $0=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)\underset{\uparrow}{=}\lim b_n-\lim a_n=b-a$
חשבון גבולות
צ"ל $b=a$.

נסמן: $C=b=a$. אנו טוענים $\{C\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ צ"ל

א) $\forall n\ a_n\le C_n\le b_n$ ב) וגם שאין עוד C' כזה.

א) $a_n\overset{\forall n}{\le}\sup a_n=C=\inf b_n\overset{\forall n}{\le}b_n \Rightarrow \forall n\ C\in[a_n,b_n]\Rightarrow C\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

ב) אילו היה $C\ne C'$ מתקיים הבא: $a_n\le C'\le b_n$ נשאיף ($a=C$, $b=C$) $\Rightarrow$ סתירה.

הוכחה נוספת של BW:

נתונה סדרה (a_n) חסומה, נניח $a \le a_n \le b \quad \forall n$

נגדיר (אינדוקטיבית) סדרה של קטעים מקוננים שתקיים את התנאים בלמה של קנטור.

נגדיר: $a_1=a, b_1=b$ ~~נחצה~~ נחצה בנקודה: $\frac{a+b}{2}$, לאחד (לפחות) מ-2 הקטעים $[a_1,\frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$ יש אין סוף מאיבר הסדרה המקורית.

נסמן קטע זה ב: $[a_2,b_2]$

כך שיש בכל אחד מהם אין סוף מאיברי a_n

באופן אינדוקטיבי אם הגדרנו את $I_1,\dots,I_k=[a_k,b_k]$, נחצה בקטעים $[a_k,\frac{a_k+b_k}{2}],[\frac{a_k+b_k}{2},b_k]$, לאחד מהם יש ∞ מאיברי הסדרה ונסמן אותו $[a_{k+1},b_{k+1}]$.

האורך של: $I_1=b-a$, $I_2=\frac{b-a}{2}$ $\Leftarrow$ $I_k=\frac{b-a}{2^{k-1}}$

ובפרט האורך $\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

לפי הלמה של קנטור ישנה נק' יחידה $c\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$.

נבנה תת"ס של a_n שמתכנסת ל-c ע"י בחירת איבר מתאים מ-a_n

לכל k (נכון, וזה ~~בסדר~~ שהאינדקס שלו גדול מהקודם- כי בקטע יש אין סוף איברים אז חייב להיות כזה).