

חדור שינוי 6

לחני והתנסות

טענה (מבחן השוואה): יהי a_n סדרה חיובית, ונניח שקיים $0 < \alpha \leq 1$

כך ש- $a_n \frac{1}{n} \leq \alpha$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ או מתחיל מסוים) אזי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

הוכחה: נניח ש- $a_n \frac{1}{n} \leq \alpha$ ($\forall n > N$)

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ 0 & \leq a_n \leq \alpha^n \\ & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad (0 < \alpha < 1) \\ 0 & \quad 0 \quad 0 \end{aligned}$$

מסקנת המשפט נטענת 1.18, 2.4. נהוגוהו הכיתה (משפט הסדרה) $\lim c^n = 0$ עבור $0 < c < 1$

טענה (מבחן השוואה השני): יהי a_n סדרה חיובית ונניח כי קיים

החסות $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ אזי אם $L < 1$ הסדרה $a_n \rightarrow 0$

$a_n \rightarrow +\infty$ הסדרה $L > 1$

⚠ במקרה בו $L = 1$ אין אינפורמציה ודאית.

הוכחה: נניח ש- $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$

מקרה א' - $L < 1$: ניתן לבחור כזה $\tilde{\epsilon} < 1 - L$ כך ש- $L + \tilde{\epsilon} < 1$.

מהעובדה שהחסות קיים $\Leftrightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 |\sqrt[n]{a_n} - L| < \tilde{\epsilon}$

$$L - \tilde{\epsilon} < \sqrt[n]{a_n} \leq L + \tilde{\epsilon} < 1$$

קיימו ש- $\forall n \geq N_0: a_n^{1/n} \leq L + \tilde{\epsilon} < 1$ וכן מהטענה הקודמת $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (כבר).

מקרה ב' - $L > 1$: נבחר כזה $\tilde{\epsilon} < L - 1$ כך ש- $L - \tilde{\epsilon} > 1$. מהנתון

נמצא ש- $\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 |\sqrt[n]{a_n} - L| < \tilde{\epsilon}$

$$1 < L - \tilde{\epsilon} < a_n^{1/n} < L + \tilde{\epsilon}$$

$$\Downarrow \\ 1^n < (L - \tilde{\epsilon})^n < a_n$$

(כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (L - \tilde{\epsilon})^n = +\infty$ ודאי)

כעת לכל M, N מכיוון ש- $(L - \tilde{\epsilon})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ קיים N כך שכל $n \geq N$ $(L - \tilde{\epsilon})^n \geq M$

$$a_n \geq (L - \tilde{\epsilon})^n \geq M$$

$$a_n \rightarrow +\infty \Leftarrow$$

טענה (מבחן המנה השני): יהי a_n סדרה חיובית ונניח כי

קיים החסות $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ אם $L < 1$ הסדרה $a_n \rightarrow 0$

$a_n \rightarrow +\infty$ הסדרה $L > 1$

✓ הוכחה

⊗ פסית: ערובו מהו (מבחן המנה) הוא שקווי + פחית אורה.

הוכחה: נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ - ש.

מקרה א' - נניח $L < 1$. נבחר $\tilde{\epsilon}$ כך ש- $L + \tilde{\epsilon} < 1$. מה נרמון

נבחר $\tilde{\epsilon}$ - ש. $\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0 \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \tilde{\epsilon}$

כלומר $a_{N_0+1} < a_{N_0} (L + \tilde{\epsilon})$ מכאן $\tilde{\epsilon} - L < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \tilde{\epsilon} < 1$

$a_{N_0+2} < a_{N_0+1} (L + \tilde{\epsilon}) < a_{N_0} (L + \tilde{\epsilon})^2$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{N_0+k} < a_{N_0} (L + \tilde{\epsilon})^k$ ומה נרמון:

קריטריון - ש. $a_n \rightarrow 0 \iff 0 \leq a_{N_0+k} < a_{N_0} (L + \tilde{\epsilon})^k$
 חשבון גורסות יקל $L + \tilde{\epsilon} < 1$ $\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ $\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ $\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 חזרה חזרה לא משנה את השקול

מקרה ב' - נניח $L > 1$: נבחר $\tilde{\epsilon}$ כך ש- $L - \tilde{\epsilon} > 1$

נרמון $\iff \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0, L - \tilde{\epsilon} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \tilde{\epsilon}$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{N_0} (L - \tilde{\epsilon})^k < a_{N_0+k} \iff a_{N_0} (L - \tilde{\epsilon}) < a_{N_0+1}$

י. מ $\exists$ שקיים N_1 כך ש- $\forall n \geq N_1 \quad a_n > M$

אז $\forall n \geq N_0 \quad a_{N_0+k} > a_{N_0} (L - \tilde{\epsilon})^k > M$ - ש.

ובן $(L - \tilde{\epsilon})^k > \frac{M}{a_{N_0}}$ $\forall k \geq N_2$ $N_1 = N_0 + N_2$

סדרות מונטוניות

הצגה: סדרה עולה מונוטונית $a_{n+1} \geq a_n$ אם

הצגה: בהנתן סדרה חסומה ממש (עליון) $\sup(a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

(תחתון) $\inf(a_n)$

טענה: אם a_n סדרה מונטונית עולה! חסומה ממש אז

$a_n \rightarrow L = \sup(a_n)$ (תחתון) $\inf$ - ו

$\iff$ מפרק: סדרה מונטונית + חסומה = מתכנסת!

הוכחה: י. י. בדע. $\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq N_0, L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$
 תמיד מתקיים $\sup(a_n) = L$ $\iff$ $a_n \leq L < L + \epsilon$

לפי אחת השקולות זנחיות $\sup A$ נובע שקיים $L - \epsilon < a_{N_0}$

מכיון ש- a_n מונטונית עולה $\iff \forall n \geq N_0: L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$

הוכחת טיורינג

$$a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{8}) \dots (1 - \frac{1}{2^n}) \quad (1)$$

נשים זק - $0 \leq a_n$ וכן $a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1$
 בדרך מונוטונית יורדת וחסומה למטה ולכן מתכנסת.

$$a_1 = \sqrt{6} ; a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad (2)$$

מונוטונית עולה

נראה ש- a_n - a_{n+1} נא. נבדוק: $a_2 > a_1$ נכון סדר דה.
 שם אינרואקציה

נניח ש- $a_n \geq a_{n-1}$ ונבדוק ש- $a_{n+1} \geq a_n$ אכן: $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \geq \sqrt{6 + a_{n-1}} = a_n$

נראה כעת כי $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

נא. נבדוק: $a_1 = \sqrt{6} < 3$ נניח $a_n \leq 3$ ונבדוק ש- $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \leq \sqrt{6 + 3} = 3$
 נכונות!

זכנו שם הסדרה הקובעת a_n מתכנסת.

$$(\text{הטורסל: אם } a_n \text{ אכן מתכנסת}) \iff \begin{matrix} L^2 - L + 6 = 0 \\ L = 3 \end{matrix} \iff \begin{matrix} a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \\ L = \sqrt{6 + L} \end{matrix}$$

הערה: סדרה מונוטונית עולה ונא חסומה למעלה $\rightarrow +\infty$

$$1) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$$

שם בדיקות תוספות:

$$2) \quad a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$(a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0) \quad \text{נניח כי } a_n \text{ נא חסומה ומונוטונית עולה}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \dots) > 1 + \frac{1}{2}$$

$$\gg 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^n}) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \dots = 1 + \frac{n}{2}$$

$$a_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

3. הכנסת פירוש המשנה

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_0: a_n \geq b_n, \quad b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 \quad a_n \geq b_n \quad (1.5)$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad (1.6)$$
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1: a_n > M \quad (3. \quad M \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{no})$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \forall n > N_2 \quad b_n > M \quad \text{and} \quad b_n \rightarrow +\infty$$

□ $\forall n > N_1: a_n \geq b_n > M$ סופית $N_1 = \max\{N_2, N_0\}$ 7.10.10

: 2/ND 100N

מה a_n סדרה חיובית ויש $0 < \alpha < 1$ כך $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha$

$a_n \rightarrow 0$ 3/10

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \alpha$$
$$Q_{N_0+2} \leq \alpha \cdot Q_{N_0} \leq Q_{N_0} \cdot \alpha^2 \quad \text{p.t.} \quad Q_{N_0+1} \leq \alpha \cdot Q_{N_0} \quad : \underline{0,0,0}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff 0 \leq a_{n_0+t} \leq a_{n_0} \cdot \alpha^t$
 $a_{n_0+t} \rightarrow 0 \quad \downarrow$
 $0 \quad \downarrow$

א"י. הצצה של סדרה לא משנה את ההתכנסות שלה לכן $a_n \rightarrow 0$