

תורת המעשרות - תוספת

טענה: $a_n \rightarrow L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N$ איברי הסדרה נמצא מספר

כזה, נמצאים בריוח $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

(הערה: משיעור נספח: כל סדרה מתכנסת היא חסומה)

טענה: תהי a_n סדרה ונניח $a_n \rightarrow L, L \neq 0$. אזי לכל $0 < r < 1$

קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n| > r$.

הוכחה: נניח $0 < r < 1$, נבחר $\varepsilon = L - r$. מהצורת הצדקה קיים N כך

שכל $n > N$ מתקיים: $r = L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ כל $r < a_n < 0$

וכבר $|a_n| < r$ $\forall n > N$ (הערה: עקור $L < 0$)

משפט העברון גרומיות

תהינה (a_n) ו- (b_n) סדרות ונניח $a_n \rightarrow a$ ו- $b_n \rightarrow b$. אז:

(1) הסדרה $(a_n + b_n)$ מתכנסת ל- $a + b$ $(\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n)$

(2) הסדרה $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת ל- $a \cdot b$ $(\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n)$

(3) אם $b_n \neq 0$ לכל n ו- $a \neq 0$ אז:

הסדרה $(\frac{a_n}{b_n})$ מתכנסת ל- $\frac{a}{b}$ $(\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n})$

הוכחת המשפט:

(1) יהי $\varepsilon > 0$. מהצורת הצדקה קיים N_1 כך שכל $n > N_1$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

כמו כן קיים N_2 כך שכל $n > N_2$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נבחר $N = \max(N_1, N_2)$ ואז לכל $n > N$: (הערה: $N_1 < N_2$ או $N_2 < N_1$)

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

הצדקה הצדקה אי שוויון המשולש

(2) יהי $\varepsilon > 0$. מטענה משיעור נספח, משיג a_n מתכנסת היא חסומה.

נבחר M מספר כזה שיהיה $|a_n| \leq M$ $\forall n$.

מהנחת קיים N_1 כך שכל $n > N_1$: $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

וכן קיים N_2 כך שכל $n > N_2$: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b|+1}$ (כאן $N = \max\{N_1, N_2\}$).

אם $n > N$: $|a_n b_n - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b|$

$$= |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|b|+1} \cdot |b| < \varepsilon$$

(3) מספיק ש (2) יהיה ח. - $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ (אח"כ ניתן להרשים ב- a_n)

יהי $0 < \varepsilon$. ש.פ. הטענה מתחזקת הניסוח עקור $r = \frac{|b|}{2}$ ק"מ

N_1 כך שכל $n < N_1$ $|b_n| < r < |b|$ (0 < r). מהצד השני ק"מ $N_2 \in \mathbb{N}$

כך שכל $n < N_2$: $|b_n - b| < \varepsilon \cdot r \cdot |b|$ נכון $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$

ואז כל $n < N_0$ מתק"מ $n > N_1$ $n > N_2$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b \cdot b_n|} \leq \frac{|b - b_n|}{|b| \cdot r} < \frac{\varepsilon \cdot r \cdot |b|}{|b| \cdot r} = \varepsilon$$

13.10.10: תרגילים

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}} + 5 \cdot 3^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + (0.3)^n}) = 1 + 5 \cdot 1 + 0 + \frac{1}{1+0} = 7$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2n + 5n^2 - 10n^3}{5 - 3n + 4n^2 + 2n^3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n} - 10}{\frac{5}{n^3} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n} + 2} \right) = \frac{-10}{2} = -5$

3. סדרה: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{a_n + 2} \end{cases}$ כעבור 2-3 איברים (נר) יהיה שיש לה שפה.

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L$ נכון

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 1}{a_n + 2} = \frac{L+1}{L+2} \Leftrightarrow L^2 + 2L = L+1 \Leftrightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} \stackrel{\text{חסבון קטלור}}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} =$

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$ יחסיות שיתור

13.10.11: תרגילי גבולות וחסבון קטלור

משפט: תהיה $a_n \rightarrow a$! $b_n \rightarrow b$ סדרות $(a, b \in \mathbb{R})$ ונ"ח

שכל n (מספיק גדול) $a_n \leq b_n$ אז $a \leq b$.

(שים לב: אין להפוך לרשום $a < b$ מקום $\leq$ כל מקום !)

טענה עזרי: תהי $d_n \leftarrow d$ ונ"ח $\forall n$ $d_n \neq d$ אז $d \neq 0$.

הוכחה: נ"ח קטלור $d \neq 0$. נבחר ε כך ש- $d + \varepsilon < 0$ (אם $d < 0$) $(\varepsilon = \frac{|d|}{2})$

מהצד השני ק"מ כל כך שכל n : $d - \varepsilon < d_n < d + \varepsilon < 0$

$\forall n$ $d_n \leq 0$ אז $d \leq 0$

הדגמה 5: תורת הגבול

הוכחת המשפט: נתונה a_n ו- b_n כך ש- $a_n \leq b_n$ ו- $b_n - a_n \rightarrow 0$. אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = b - a$$

אם $a \leq b$ אז $0 \leq b - a$ ו- $d = b - a$.

משפט הסנדוויץ':

תהייה סדרה $(x_n), (y_n), (z_n)$ ו- $N^* \leq n$ ו- $x_n \leq y_n \leq z_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. קיים N_1 כך ש- $N_1 < n$ ו- $L - \epsilon < x_n < L + \epsilon$.

קיים N_2 כך ש- $N_2 < n$ ו- $L - \epsilon < z_n < L + \epsilon$.

$$L - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \epsilon$$

$$L - \epsilon < y_n < L + \epsilon$$

דוגמה 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 5n + 3} = 0$

$$0 \leq \frac{n}{n^2 + 5n + 3} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\frac{n}{n^2 - 5n + 3} \rightarrow 0$$

$$0 < \frac{n}{n^2 - 5n + 3} \leq \frac{n}{\frac{n^2}{2} - 5n + 3} \leq \frac{n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

הקשר בין $\frac{n}{n^2 - 5n + 3}$ ל- $\frac{n}{\frac{n^2}{2} - 5n + 3}$ מתקיים עבור $n > 100$.

$$5^n \leq 2^n + 3^n + 5^n \leq 5^n + 5^n + 5^n = 3 \cdot 5^n$$

$$5 = (5^n)^{\frac{1}{n}} \leq (2^n + 3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}} \leq (3 \cdot 5^n)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{1}{n}} \cdot 5$$

$$a_n \rightarrow 0 \iff 0 \leq a_n = \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \left(\frac{3}{n}\right) \dots \left(\frac{n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \iff a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$0 \leq \frac{a_n}{n} \rightarrow 0$$

$$0 < \frac{-M}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{M}{n} \rightarrow 0 \iff -M < a_n < M$$

טענה: תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ חסמה מוגבלת ונמאן $b = \sup B$.

אזי קיימת סדרה $(b_n) \subset B$ כזו $b_n \rightarrow b$.

פוכח: ניקח $b - \frac{1}{n}$. הוא לא חסם מוגבל ב- B .

כל קיימת נקודה ב- B , נמאן אותה b_n , כך $b - \frac{1}{n} < b_n$.

כך בנינו $b_n \in B \forall n$ אזי
 $b - \frac{1}{n} < b_n < b$
והמקרה $b_n \rightarrow b$