

# 4 חדור-שיעור

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

הפעם נעביר מושג חדש

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$$

טענה: לסדרה  $a_n = (-1)^n$  אין גבול סופי

הוכחה: נניח להפך ש-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = L$  כל

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N}, |(-1)^n - L| < \varepsilon$$

בפנים, עבור  $\varepsilon = 1$  קיים  $N$  כך שכל  $n > N$  :  $|(-1)^n - L| < 1$

$$|(-1)^{n+1} - L| + |(-1)^n - L| < 1 + 1 = 2 \quad \text{נקח } n+1, n > N \text{ מתק"ס:}$$

$$2 = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^{n+1} - L| + |(-1)^n - L|$$

קיימנו  $2 < 2$  וזו סתירה

⚠ היה צריך גם עבור  $\varepsilon < 1$  אבל זה אפשרי

טענה: יהי  $0 < c < 1$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$

תצורות: עבור  $a, b > 0$

הוכחה:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N, |c^n - 0| < \varepsilon$

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$$

$$|c^n - 0| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < c^n < \varepsilon \Leftrightarrow |c^n - 0| < \varepsilon \quad \text{נשים זה ש-}$$

אם כן  $0 < \varepsilon$  :  $\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N, c^n < \varepsilon$  יהי  $0 < \varepsilon$

טריק: נבחר  $c = \frac{1}{1+d}$  (נשתמש ב- $d > 0$ )

$$\left( \begin{array}{l} \frac{1}{dn} < \varepsilon \\ \frac{1}{n} < d\varepsilon \\ n > \frac{1}{d\varepsilon} \end{array} \right) \quad c^n = \frac{1}{(1+d)^n} \leq \frac{1}{1+dn} < \frac{1}{dn} < \varepsilon$$

נקח את  $N_0 = \left\lfloor \frac{1}{d\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$

עבור  $n > N_0$  את מתק"ס  $|c^n - 0| < \varepsilon$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$$

טענה: יהי  $a > 0$  אז

נ"ח - מתקן א'  $a > 1$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}. \forall n > N_0 \quad |a^{1/n} - 1| < \varepsilon \quad (3)$$

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< a^{1/n} < 1 + \varepsilon \\ \Leftrightarrow -\varepsilon &< a^{1/n} - 1 < \varepsilon \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$1 < a$  מתקן 1

אם כן יהי  $0 < \varepsilon$ , נראה שקיים  $N_0$  כך ש-

$$\begin{aligned} \Updownarrow \\ a < (1 + \varepsilon)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^n &> 1 + n\varepsilon > a \\ n\varepsilon &> a - 1 \\ n &> \frac{a - 1}{\varepsilon} \end{aligned}$$

נקח את  $N_0 = \left\lceil \frac{a - 1}{\varepsilon} \right\rceil + 2$  ונעבור  $\forall n > N_0$  מתקן 1 הדומה

מתקן 2:  $0 < a < 1$

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N_0 \quad |a^{1/n} - 1| < \varepsilon \quad \text{יהי } \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \Updownarrow \\ \varepsilon - 1 &< a^{1/n} < 1 + \varepsilon \end{aligned}$$

$\text{מתקן 2}$

$$(1 - \varepsilon)^n < a \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \varepsilon < a^{1/n}$$

נמצא  $N_0$  כך שם  $n > N_0$ :  
אם  $0 < \varepsilon < 1$  זה סדיוואלי. עבור  $0 < \varepsilon < 1$  מתקן 2 הקובעת נוסף ש-  $(1 - \varepsilon)^n$  שואף ל-0 וכן

קיים  $N_0$  כך שם  $n > N_0$ :  $(1 - \varepsilon)^n < a$

טענה: אם  $a_n \rightarrow L$  אז  $|a_n| \rightarrow |L|$

הוכחה: לא נכון סכיון ההפוך (בדיוקא עבור  $(-1)^n$ )

טענה:  $a_n \rightarrow 0$  אם ורק אם  $|a_n| \rightarrow 0$  (תלוי)

הוכחה: יהי סדיו  $a_n \rightarrow L$   $\Leftrightarrow |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$$(\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N_0 \quad ||a_n - L| - |L|| < \varepsilon) \quad (3')$$

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| \leq \varepsilon \quad \text{עבור } n > N_0 \text{ כפייה } a_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$  א. שיוון המשפט



## החומר שיעור 4 קורס \*

טענה: אם זקוק סדרה ק"ס אזי היא יחיד!

הוכחה: נניח שהסדרה  $a_n \rightarrow L_1$  וכן  $a_n \rightarrow L_2$ .  $L_1 \neq L_2$ .

נבחר  $\tilde{\epsilon} = \left| \frac{L_1 - L_2}{2} \right|$ . מההנחה נובע ש-  $0 < \tilde{\epsilon}$ .  $\exists N_1 \in \mathbb{N}. \forall n > N_1, |a_n - L_1| < \tilde{\epsilon}$ .

$\exists N_2 \in \mathbb{N}. \forall n > N_2, |a_n - L_2| < \tilde{\epsilon}$

נקח  $N = \max\{N_1, N_2\}$  ונסתכן  $n > N$ . מתקיים

$$|L_1 - L_2| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < 2\tilde{\epsilon} = |L_1 - L_2|$$

כל שוויון המשווה

סתירה.  $\blacksquare$

## גבולות מ"ס סופיים \*

הצבה:  $a_n$  שואפת  $+\infty$  אם  $\forall M \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : a_n > M$

$a_n$  שואפת  $-\infty$  אם  $\forall M \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : a_n < M$

דוגמה: הסדרה  $a_n = d^n$  עבור  $d > 1$  שואפת  $+\infty$ .

הוכחה: יהי  $M > 0$ . נמצא  $N_0$  כך שלכל  $n > N_0$  מתקיים  $d^n > M$ .

נבחר  $d = 1 + c$  ( $d > 1 \Leftrightarrow c > 0$ ) ואז:

$$d^n = (1+c)^n \underset{\text{ברנולי}}{\geq} 1 + nc \underset{\text{ברנולי}}{\geq} M$$

נקח את  $N_0 = \left\lfloor \frac{M-1}{c} \right\rfloor + 3$ , ועבור  $n > N_0$  מתקיים  $a_n > M$ .  $\blacksquare$

## הערות \*

① 2 סדרות "הולכות למח" סופי של מספרים" מתכנסות יחדיו.

② "הצבה" של הסדרה לא משנה את ההתכנסות שלה.

③ "הצבה" - הנוכחיות של  $a_n$  כמות סופית של איברים בהתחלה ואחרים מתחילה הסדרה יתקבצו. ④

הצבה: סדרה  $a_n$  נקראת חסומה אם:

(חסומה מעל אם  $a_n < M$ , חסומה מתחת אם  $M < a_n$ )

טענה: כל סדרה מתכנסת הינה חסומה! (לא מדויק!!)

הוכחה: נתון  $a_n \leftarrow L$ . נקח  $\epsilon = 1$  ונקבל:

$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0, |a_n - L| < 1$$

$$\Rightarrow |a_n| < |L| + 1$$

המשקל



סעיף:  $M := \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_0}|, |L|+1\}$  חזון פון  $\rho$  הסדרה.