

חדול שיפור 3

תכונות נוספות של החסמים

הצגה: תהינה $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$. נאמר ש- A צפופה ב- B אם לכל $b \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$

$$\exists a \in A \text{ כך ש-} a \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

טענה: תהי $S \subseteq \mathbb{R}$. S צפופה ב- $\mathbb{R}$ אם לכל $x < y$ שני נקודות x, y ב- $\mathbb{R}$

$$\exists z \in S \text{ כך ש-} x < z < y$$

הוכחה:

$$m = \frac{x+y}{2} \quad \text{כאשר } x < y \text{ נמש"ס. נבחר}$$

$$\varepsilon = \frac{y-x}{2} \quad \text{וכן נבחר. מהנחת הצפיפות קיים } z \in S \text{ כך ש-} z \in (m-\varepsilon, m+\varepsilon)$$

$$\text{אז } m-\varepsilon = x, m+\varepsilon = y \text{ וכן } z \in (x, y) \text{ כרצוי.}$$

ע"י ש- S מקימה את התכונה שבניסוח הטענה, אנראה ש- S צפופה ב- $\mathbb{R}$.

$$\text{נשם בן יהי } b \in \mathbb{R} \text{ ו-} \varepsilon > 0. \text{ עלינו להראות שקיים } a \in S \text{ כך ש-} a \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

$$\text{נבחר: } b-\varepsilon = x, b+\varepsilon = y \text{ ומהנתון קיים } a \in S \text{ כך ש-} x < a < y \text{ כרצוי.}$$

צפיפות הרציונלים

$$\text{טענה: בין כל שני רציונלים יש רציונלי.} \quad [\forall q_1 < q_2 \in \mathbb{Q} \exists q_3 \text{ כך ש-} q_1 < q_3 < q_2]$$

$$\text{הוכחה: } q_3 = \frac{q_1 + q_2}{2} \text{ מקיים את הדרישה}$$

$$\text{טענה: בין כל שני רציונלים יש אינסוף רציונלים.}$$

$$\text{הוכחה: ע"י השוואה יש רק מס' סופי, } q_1 < x_1 < \dots < x_n < q_2.$$

$$\text{אז אם } \frac{x_1 + q_1}{2} \in \mathbb{Q} \text{ הסתירה.}$$

$$\text{טענה: בין כל שני מס' ממשיים יש מס' רציונלי (ובפרט, הרציונליים צפופים ב-} \mathbb{R} \text{)}$$

$$\text{הוכחה: יהי } a < b \in \mathbb{R}. \text{ ע"י התרחקות } a < \dots < b. \text{ נבחר } a < x < b \text{ כאלו מס'}$$

$$\text{רציונליים. } \left(\leftarrow \text{קיים רצף מתכונות ארכימדיס} \right) \frac{1}{k} < (b-a)$$

$$\text{המספרים } \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \dots, \frac{m}{k}, \dots \text{ נבחר } m \in \mathbb{N} \text{ כך ש-} \frac{m}{k} \geq b-a$$

$$\text{ע"י } \frac{m}{k} \geq b-a \text{ נקבל } \frac{m-1}{k} < b-a$$

$$\text{נבחר } a < q < b \text{ ונניח } q = \frac{m-1}{k} \text{ אזי } a < q < b$$

$$\text{אם } q < a \text{ נשם ש-} m-1 \neq m \text{ אז } q = \frac{m-1}{k} < a < q \text{ כי אז } a < q$$

$$\text{אם } q > b \text{ נשם ש-} m \neq m-1 \text{ אז } q = \frac{m}{k} > b > q \text{ כי אז } q < b$$

נחזור למקרה הכללי, נניח שמתקיים $a \leq 0$. קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $0 < a+n$.

נשתמש במקרה הראשון ונבחר $q = (a+n, b+n)$ כדלג.

ואז המספר $q-n$ מקיים: $\exists q-n \in (a, b)$
 (הצגת $q-n$ שבה מסתמך סבור)

דהויות וזרי שוונות חשבוניות

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

⊗ הבינום של בינום

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

⊗ אי שוויון הממוצעים

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

⊗ אי שוויון ברנולי $(\forall x > -1)$

$$||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$$

$|a-b|$ שמה

⊗ אי שוויון המשולש

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

ניכוח שקול עקיף:

טענה: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ונניח ש- $0 < \varepsilon$ אז $|a-b| < \varepsilon$

אז $|a-b| < \varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$ אז נלקח מתק"פ

הוכחה: נניח $a \neq b$, נכחן $0 < |a-b|$

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

⊗ נכחן שימושית נצטרפים:

הוכחה: כופשים $q-1$ את שני האגפים ונחלק ב- $q-1$...

סדרות:

סדרה היא קבוצה מסודרת מהצורה: $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$
 האוסף ה- n י הסדרה מסומן a_n (או b_n).
 a_j הוא מס' ממשי ב- $\mathbb{R}$ (אוסף של יכול להיות $\pm\infty$).
 כמובן, אין אוסף ששמו a_∞ . סימונים: $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ או $(a_1, a_2, \dots)$
 נתעניין לרוב ב"התנהגות" של הסדרה כאשר $j \rightarrow \infty$.

דוגמאות: $(7, 7, \dots)$ $\forall j: a_j = 7$

$(8, 5\frac{1}{4}, \dots)$ $a_n = 3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}$

$(8, \sqrt{34}, \sqrt[3]{152}, \dots)$ $a_n = (3^n + 5^n)^{\frac{1}{n}}$

$a_n = 0$ = הסדרה הנחית הסתירה העשויה של π

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

הצבה: סדרה $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ נקראת חסומה אם קיים M
 כך ש- $a_j \leq M$ לכל j .

סדרה נקראת חסומה אם קיים M כך ש- $|a_j| \leq M$ לכל j .

סדרה נקראת חסומה אם קיים M כך ש- $|a_j| \leq M$ לכל j .

$\otimes$ הערה: $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ חסומה $\Leftrightarrow \exists M > 0$ כזו ש- $|a_n| \leq M$ לכל n .

גבולות

הצבה: יהי סדרה $(a_n)_{n=1}^\infty$ ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

(או $a_n \rightarrow L$) או L הוא הגבול (חסומה) של a_n או a_n שואפת ל- L .

אם: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$

דוגמאות: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C$ (סדרה $a_n = C$ לכל n). מתקיים

אכן, לכל $\varepsilon > 0$ אפשר לבחור $N = 1$ וגם $N < n$ מתקיים $|a_n - C| < \varepsilon$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ - $a_n = \frac{1}{n}$ ②

הערה: יהי $\varepsilon > 0$. עלינו להראות שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שכל $n > N$: $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

כל $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$. נבחר נמשל $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ ואז כל $n > N$

מתקיים $\frac{1}{n} < \varepsilon$ כל $n > N$ כל $|a_n - 0| < \varepsilon$ כל $n > N$ כל n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

$$: a_n = 3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}$$

③

הוכחה: יהי $0 < \varepsilon$ ונתון n_ε כזה ש $n_\varepsilon < n$

$$\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow |3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} - 3| < \varepsilon$$

נבחר n_ε כזה ש $n_\varepsilon < n$

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor + 17 \quad \text{אם } \frac{4}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{①}$$

$$n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \right\rfloor + 5 \quad \text{אם } \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{②}$$