חדו'א אחרון

המספרים הממשיים - הסיפור האמיתי

<u>טענה</u>: קיים ויחיד שדה, סדור, שמקיים את אקסיומת השלמות!

<u>מתחילים מ- $\mathbb{Q}$</u>: שדה, סדור

<u>הגדרה</u>: עבור $a_n, L \in \mathbb{Q}$ ניתן להגדיר $a_n \to L$.

$\forall \omega > 0,\ \omega \in \mathbb{Q},\ \exists N \in \mathbb{N}$ כך ש $\forall n > N: |a_n - L| < \omega$

<u>הגדרה: סדרת קושי</u>: אותה הגדרה מוכרת, רק ש- $\forall \omega > 0,\ \omega \in \mathbb{Q},\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m,n > N:$
$|a_m - a_n| < \omega$

<u>טענה: כל סדרת קושי היא חסומה</u>:

רעיון: נקח $\omega = 1$, $n = N+1$. יתקיים: $\forall m > N: |a_m| \leq |a_n| + 1$

$\Leftarrow$ ~~ה~~חסם הוא: $M = \max\{|a_1|, \ldots |a_N|, |a_N| + 1\}$

טענה אם a_n מתכנסת אזי היא סדרת קושי אפשר לבחור..

רעיון: אם נתון $a_n \to L$ מתקיים: $|a_m - a_n| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2} = \omega$

⚠ מה לגבי הכיוון השני?

נניח ש- a_n קושי $\Leftarrow$ a_n מתכנסת (מב $\mathbb{Q}$).

<u>איך הוכחנו</u>? השתמשנו ב- BW. $\leftarrow$ איך הוכחנו את BW?

בעזרת 3 טענות: (1) $\exists a_{n_k}$ מונ' עולה או יורדת $\leftarrow$ עובד ב- $\mathbb{Q}$ ✓

(2) ירושה $\leftarrow$ עובד ב- $\mathbb{Q}$ ✓

(3) סדרה חסומה מתכנסת. $\xleftarrow{⚠}$ השתמשנו בקיום sup.

למעשה- $e = 2.718281845 9\ldots$ ראינו ש $e \notin \mathbb{Q}$ אבל ניתן להגדיר סדרה:

סדרת קושי אבל לא מתכנסת $\rightarrow$ $a_1 = 2,\ a_2 = \frac{27}{10},\ a_3 = \frac{271}{100},\ a_4 = \frac{2718}{1000} \ldots\ldots$
ב- $\mathbb{Q}$!!

<u>תזכורת: יחס ~~סדר~~ שקילות</u>: $(S, \text{"}\sim\text{"})$ קבוצה + יחס סדר שמקיים:

① רפלקסיביות ② סימטריות ③ טרנזיטיביות $\Rightarrow$ זהו יחס שקילות

⊛ מחלקת שקילות: $[s] = \{x \in S \mid x \sim s\}$.

מתקיים: $\forall s,t \in S,\ [s] = [t]$ או $[s] \cap [t] = \emptyset$

קב' סדרות קושי רציונליות

הגדרה- מספרים ממשיים: $(\mathcal{L}\mathbb{Q}, \sim)$

$a_n \sim b_n$ אם $a_n - b_n \to 0$ (נשים ♡ שקל לבדוק שזהו אכן יחס שקילות).

מספר ממשי זהו מחלקת שקילות של סדרות קושי רציונאליות (→ טענה)

נשים לב ש- $\ddot{\mathbb{Q}} \subseteq (\mathcal{L}\mathbb{Q}/\sim)$. בהינתן $q \in \mathbb{Q}$: $[q] = [(q,q,q,q,\ldots)]$

זה לא אוסף של מס' — ניתן לבנות פונק' חח"ע $\mathbb{Q} \to (\mathcal{L}\mathbb{Q}/\sim)$

נגדיר פעולות חיבור וכפל:

$\circledast \quad [a_n]+[b_n] := [a_n+b_n]$

$\circledast \quad [a_n]\cdot[b_n] := [a_n \cdot b_n]$

יש להוכיח סגירות כלומר $a_n+b_n,\ a_n \cdot b_n \in \mathcal{L}\mathbb{Q}$

מדוע הפעולות מוגדרות היטב?

חיבור: $[a_n]=[c_n]$; $[b_n]=[d_n]$, צ"ל: $[a_n+b_n]=[c_n+d_n]$

$$\Updownarrow$$

$$(0 \leftarrow)\ |(a_n+b_n)-(c_n+d_n)| \le |a_n-c_n|+|b_n-d_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \ \checkmark$$

כפל: $[a_n]=[c_n]$, $[b_n]=[d_n]$, צ"ל: $[a_nb_n]=[c_n \cdot d_n]$

$$\Updownarrow$$

$$(0 \leftarrow)\ |a_nb_n - c_nd_n| = |a_nb_n - b_nc_n + b_nc_n - c_nd_n| \le |b_n||a_n-c_n|+|c_n||b_n-d_n|$$

כל סדרת קושי רציונלית היא חסומה

$$\le M|a_n-b_n|+N|b_n-d_n| < \varepsilon \ \checkmark$$

בחירה נכונה

(כל השאר דומה) ←

נראה רק דרישה אחת מהאקסיומות של שדה:

יש להבין מי זה?

נראה שעבור $0 \neq s \in (\mathcal{L}\mathbb{Q}, \sim)$ קיים $t \in (\mathcal{L}\mathbb{Q}, \sim)$ כך ש- $s \cdot t = 1$

* מה זה אומר $s \neq 0$?

נ.ח ש- $s=[a_n] \neq 0$ כך ש- $a_n - 0 \not\to 0$.

טענה: במקרה כזה, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n>N$ מתקיים $a_n \neq 0$.

כעת נגדיר: $t=[b_n]$ כך ש- $(b_n) = (0,0,0,\ldots,\underset{N}{0},\frac{1}{a_{N+1}},\frac{1}{a_{N+2}},\frac{1}{a_{N+3}},\ldots)$

⚠ יש להשתכנע: b_n סדרת קושי של מספרים רציונליים, וכן $s \cdot t = 1$.

נגדיר יחס סדר:

הגדרה: $s>0$ ($[a_n] = s \in (\mathcal{L}\mathbb{Q}/\sim)$)

אם $s \neq 0$ וקיים N כך שלכל $n>N$: $a_n>0$.

⚠ יש לבדוק: מדוע מוגדר היטב (לא תלוי בנציג)?

הגדרה: $s>t$ אם $s-t>0$

המשך הממשיים - הסיפור האמיתי

$\boxed{\mathbb{R} := (\mathcal{CQ}/\sim)}$ יש מבנה סדר. (אפשר גם בקלות להראות תכונות אלג׳)

__צפיפות הרציונליים בממשיים__

__טענה:__ $\forall r\in\mathbb{R}$, $\forall \underset{\omega>0}{\omega\in\mathbb{Q}}$ קיים $q\in\mathbb{Q}$, $|r-q|<\omega$.

__הוכחה:__ r מיוצג ע"י סדרת קושי רציונלית כלשהי. נאמר $(a_n)=(a_1,a_2,\dots)$

כלומר $\exists N\ \forall m,n>N.\ |a_m-a_n|<\omega$

נקבע $l>N$. נתבונן ב- $q:=(a_l,a_l,a_l,\dots)\text{"}\in\mathbb{Q}\text{"}$

נתבונן ב- $\left\{\begin{array}{l} r-q=[(a_n-a_l)]<\omega \\ q-r=[(a_l-a_n)]<\omega \end{array}\right. \Rightarrow |r-q|<\omega$.

__טענה:__ $(\mathcal{CQ}/\sim)$ מקיים את אקסיומת השלמות.

תהי $S\subset\mathbb{R}$ קב' לא ריקה וחסומה מלעיל.

(נניח $\forall s\in S,\ s\le M$ וכן $\exists s_0\in S$).

נראה שקיים איבר ממשי שהוא חסם מלעיל של S, וגם לא קיים אף חסם מלעיל של S שקטן ממנו.

__נגדיר 2 סדרות של מספרים:__ $(u_n),(l_n) \Rightarrow$ איברים ממשיים!! מחלקות שקילות של סדרות קושי!

$l_0=s_0,\ u_0=M$. נניח שהגדרנו את u_n, l_n.

__נסמן:__ $m_n=\frac{u_n+l_n}{2}$ * אם m_n חסם מלעיל של $S \Leftarrow u_{n+1}=m_n,\ l_{n+1}=l_n$

* אם m_n לא חסם מלעיל של $S \Leftarrow u_{n+1}=u_n,\ l_{n+1}=m_n$

__נשים ♡__ ש- $u_n\searrow$, $l_n\nearrow$ (חלש)

__טענה:__ הן סדרות קושי (הן חסומות לפי ההגדרה ($\in(l_0,u_0)$)).

__טענה:__ $u_n\to u$

__הוכחה:__ מצפיפות הרציונליים: $\exists q_n.\ |u_n-q_n|<\frac{1}{n}$

נקבע ω כרגיל. רעיון:

בבחירה נכונה של המקומות

- q_n קושי כי u_n הוא כזה וגם $|q_n-q_m|\le|q_n-u_n|+|u_n-u_m|+|u_m-q_n| < \omega$
- ולכן הסדרה q_n מייצגת מס' ממשי $[u]$ - $[(q_1,\dots q_n\dots)]$
- טענה $u_n\to u$: רעיון: ככה בחרנו את הסדרה q_n. ∎

המשך

טענה: גם $l_n \to u$

טענה: u הוא $\sup S$

פשוט להשלים.