

27 חדול

פונקציות קמורות (קעורות)

תכונות: צירוף קמור: כ"א שם מקבצים חזקים (1 פונקט) $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$: x_1, x_2 ש

כאשר $0 \leq \lambda \leq 1$: $f(x) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$: פונקציה קמורה תקיפה.

אי שוויון ינס: אם f קמורה ! $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m$ - $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ אזי $f(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$ (וכפרט) $f(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_i)$

הוכחת העזרה: נניח באינדוקציה:

בסיס - $m=2$: נאז נתונים $0 \leq \lambda \leq 1$! $0 \leq \mu \leq 1$: $\lambda + \mu = 1$ כ"א $\mu = 1-\lambda$

1: $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$: הוכחה קטנה ✓

2: אם $m-1$ איברים ונתונים $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$:

נניח $\lambda_1 = \mu$, $(1-\mu) = \sum_{j=2}^m \lambda_j$; מתקיים:

$$f(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i) = f(\lambda_1 x_1 + \sum_{i=2}^m \lambda_i x_i) = f(\mu x_1 + (1-\mu) \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1-\mu} x_i) \leq \mu f(x_1) + (1-\mu) f(\sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1-\mu} x_i)$$

וכפרט מה"א והעזרה - $\sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1-\mu} = 1$ נקבל:

$$f(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i) \leq \mu f(x_1) + (1-\mu) \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1-\mu} f(x_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

3 תכונות א"ש 3 הנתיבים: f קמורה, $x_1 < x_2 < x_3$: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$!

טענה: אם f קמורה על קטע I (פתוח) ו- $x_0 \in I$ אזי קיימות הנגזרות החד צדדיות

של f בנק' x_0 , ומתקיים $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$. יתר על כן, f'_- ו- f'_+ הם פונקציות

עונות ב- I .

$$f'_- = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} ; f'_+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

הוכחה: מההצטרות:

ממשט שטח הנתיבים, הפונקציה f (ש x) $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (האינפ) עולה ב- x ,

$$\text{וכפרט מתקיים: } \inf_{x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

כ"א $z < x_0$ הקטן ביותר מזהם ע"י השישים $\frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z}$, ואכן ה- $\inf$ הוא

סופי והצדק קיים $f'_+(x_0) \leftarrow f'_-(x_0)$ ק"מ.

יתר על כן קיבלנו (ממשט 3 הנתיבים) שכל $x_0 < x$, $z < x_0$ מתק' :

$$f'_- = \lim_{z \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0) - f(z)}{x_0 - z} \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'_+ \leftarrow f'_- \text{ (ע"י הצדק)}$$

גרסה הרחבה:

יהי $x_0 < x_1$ כ- I ונסה $f'_+(x_0) = f'_-(x_1)$ (כ- $f'_+(x_1)$)
 $\Leftrightarrow$ $x_0 < x < x_1$ לכל x .

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \text{לכל } x_0 < x < x_1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

שההפך f'_-, f'_+ עוזות כנדרש $\Rightarrow f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$

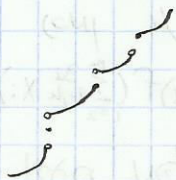
⚠ פונק' קמורה היא זריחה כ- $x \Leftrightarrow f'_-(x) = f'_+(x)$ (שן הביטויים כוונות קיימים ופתיים!)

יתר על כן: אם f היא פונק' רציפה של $f'_+(x)$, אזי f זריחה כ- x .

מזה $\forall x > x_0$

יבוא $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'_-(x) : x_0^+ \leftarrow x$. כלת ניקח זהו $x \leftarrow x_0^+$ $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x_0)$

$\Leftarrow$ וממש המכסהי' השכרות חוזר' שוות!!



⚠ (ניצב/נעזר: לפונק' עזרה יש גם היות למ' בן מניה של נק' לא

רציפה, וכוונן טמז טשון!

ובכן לפונקציה ~~זריחה~~ קמורה היא איננה זריחה כגם היות f נקודות.

טענה: יהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (ב קטע פתוח) קמורה, אזי f רציפה כ- I .

כ- $a' < x_0 < b'$

הוכחה: יהי $x_0 \in I$, $I = (a, b)$, נחר $a' < a'' < b' < b'' < b$ לכל $x_1 < x_2$ בקטע

$$\frac{f(a')-f(a'')}{a'-a''} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(b')-f(b'')}{b'-b''}$$

$$[a', b'] \text{ כ-} x_1 < x_2 \text{ ונקב שם } C = \max\left(\left|\frac{f(a')-f(a'')}{a'-a''}\right|, \left|\frac{f(b')-f(b'')}{b'-b''}\right|\right)$$

$$f \text{ מתקיים: } |f(x_2)-f(x_1)| \leq C|x_2-x_1| \Leftrightarrow f \text{ היא ליפשיץ}$$

בקטע $[a', b']$

ובפרט רציפה בקטע הזה (המל''), ובפרט רציפה כ- x_0

טענה: אם f קמורה על I קטע מופת I ו- x_0 נק' מניחות מקומית, אזי

x_0 נק' מניחות גלובלית.

הוכחה: נתון קיים $\epsilon > 0$ כך שאם $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ אזי $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$.

יהי z כושה כ- I (נניח הר' $x_0 < z$) ונקח $\delta < x_0 < x_0 + \delta$ (נרשף): $z = (1-\gamma)x_0 + \gamma z$

$$f(x_0) \leq f(x) \leq (1-\gamma)f(x_0) + \gamma f(z) \quad \text{מקמיחת } f$$

$$\gamma f(x_0) \leq \gamma f(z) \quad (\text{כ-}\gamma)$$

$$f(x_0) \leq f(z)$$

⚠ **הבה** פונק' קמורה, מקט'

מתקבל בהקצוות הקטע

המשפט המרכזי

ראינו שיש שני סוגי פונקציות: f זכירה $\Leftrightarrow f'$ עולה
 נפרט את f זכירה פעמיים: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'$ עולה

$$f''(x) = -(\frac{1}{x})' = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\ln x$$

$$f''(x) = (\frac{1}{x})' = (-\frac{1}{x^2})' = \frac{2}{x^3} > 0 \quad f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

⚠️ סוגי פונקציות - הל-קונקסיות (Jensen):

$$-\ln(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (-\ln x_i)$$

$$\ln(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i) \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\ln x_i) = \ln \frac{1}{m} \prod_{i=1}^m x_i$$

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \geq (\prod_{i=1}^m x_i)^{1/m}$$

נמצא בהוכחה, שיש פונקציה:

וקיבלנו את א"ש הממוצעים!!

אי שוויון יאנג (Young): p ו- q מקיימים $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(במקרה $p=q=2$ נקראים הממוצעים ניוטון)

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq x \cdot y$$

אז: $x, y > 0$

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) = \ln \text{ ממוצעים}$$

$$\leftarrow \text{ממוצעים} \ln(x \cdot y) \leq \frac{1}{p} \ln x^p + \frac{1}{q} \ln y^q$$

$$\ln(x \cdot y) \leq \ln(\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q)$$

אי שוויון הולדר (Hölder): $x_1, \dots, x_n$ ו- $y_1, \dots, y_n$ ב- $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 0 < p, q < \infty$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{1/q}$$

$$\frac{x_i}{(\sum_{j=1}^n x_j^p)^{1/p}} \cdot \frac{y_i}{(\sum_{j=1}^n y_j^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^n x_j^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^n y_j^q}$$

$$\frac{1}{(\sum_{j=1}^n x_j^p)^{1/p} (\sum_{j=1}^n y_j^q)^{1/q}} \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \frac{1}{p} \frac{\sum_{j=1}^n x_j^p}{\sum_{j=1}^n x_j^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{j=1}^n y_j^q}{\sum_{j=1}^n y_j^q} = 1$$

כבר