

חידה שיעור 26

תצורות: תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f עצירה $n+1$ פעמים ב- I .

אז לכל $x \in I$ קיימת נק' c בין x ל- x_0 עבורה:

שארית נפ' : $R_n^L(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$

שארית נפ' קושי : $R_n^c(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tilde{c}_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^n (x-x_1)$

חשוב! מופיע במבחנים

תרגיל: $(1+x)^{-1} = f(x)$ מתי f שווה לסדר טיזור שזה? (סביב $x_0=0$)

פתרון: גם $k=1$: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ (הוכחה באינדוקציה).

$P_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ מתי $n(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

עבור $x > 1$, הסדר $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$ מתגבר (הוא כנ"ל) או שטוף (0-).

רציוס ההתכנסות של הסדר (קושי הצמוד): (!) נבדוק שרציוס ההתכנסות הוא 1: $(-1, 1)$

$|R_n^L(x)| = \left| \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \left| \frac{1}{1+x} \right|^{n+1} |x|^{n+1}$ (נשאר נפ' וזהו)

שאלו ג-ס או קרובים ל-0? שאלו ג-ס נותר נמוך את הכיטוי הזה, אפשרות אחר $1+x \neq 1$

$|R_n^L(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ויחל $0 \leq x \leq 1$

בסדר $-1 < x < 0$ ניקח שארית נפ' קושי.

$|R_n^c(x)| = \left| \frac{1}{(1+x)^{n+1}} (x-c)^n (x-0) \right| = \left| \frac{x}{1+x} \right| \left| \frac{x-c}{1+c} \right|^n \leq \left(\frac{|x|}{1+|c|} \right) |x|^n$
 $\left| \frac{x-c}{1+c} \right| = \frac{|x|-|c|}{1+|c|} = \frac{|x|-|c|}{1-|c|} < \frac{|x|-|c|}{1-|c|} = |x|$ (דבריו $-1 < x < 0$)

טענה: f עצירה $n+1$ פעמים ב- I . עינה כי $f(x_0) \neq 0, f'(x_0) \neq 0, \dots, f^{(n)}(x_0) \neq 0$

ועינה גם כי $f^{(n+1)}$ רציפה ב- I .

אם a זוגי $\leftarrow x_0$ איננה אקסטרמום מקומי.

אם a אי זוגי $\leftarrow$ $\bullet$ $\min$ מקומי $\leftarrow f^{(n+1)}(x_0) > 0$
 $\bullet$ $\max$ מקומי $\leftarrow f^{(n+1)}(x_0) < 0$

הוכחה: נשתמש בשארית נפ' וזהו ונקבע y (מסתבר סביב x_0 , $x = x_0 + k$)

$f(x) = P_n(x) + R_n^L(x) \Leftrightarrow f(x_0+k) = \underbrace{f(x_0) + 0 + \dots + 0}_{\text{פולינום טיזור מסדר } n} + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} k^{n+1}$

$f(x_0+k) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} k^{n+1}$

מקרה א': $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ מכיוון שבדיוקנו $f^{(n+1)}$ רציפה קיימת סביבה של x_0

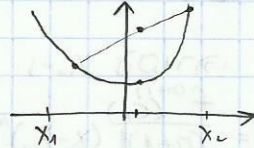
שבה $f^{(n+1)}(y) > 0$ $\forall y \in$ סביבה $\leftarrow$ $\bullet$ $\min$ מקומי $\leftarrow f^{(n+1)}(x_0) > 0$ $\bullet$ $\max$ מקומי $\leftarrow f^{(n+1)}(x_0) < 0$

$\leftarrow$ נשקף לסיים את ההוכחה מפרדים למקרה (צד אי זוגי, k חיובי/שלילי)

הצבה: תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f קמורה (Convex) $\Leftrightarrow$ f קמורה $I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x_1, x_2 \in I, 0 < \lambda < 1. f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

$\cup$ קמורה x^2 $\otimes$ קמורה



הכרזה: (1) f קמורה (Convex) אם אי השוויון הפוך

(2) f קמורה (קמורה) ממש אם אי השוויון חזק.

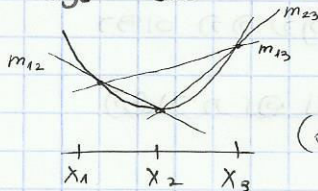
(3) קו עיגולי ($ax+b$) הוא פ"ק קמור ופ"ק קמור (כא ממש!)

(4) אם f קמורה (קמורה) אז $f+(ax+b)$ קמורה (קמורה)

משפט 3 העיתרים: אם f קמורה אז:

$$\forall x_1 < x_2 < x_3 \in I: \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \leq \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

($y_i = f(x_i)$)



הכרזה: (כא) $m_{13} \leq m_{23}$ נשים פ"ק ש"מ $0 < t < 1$

$$(0 < t = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} < 1 \Leftrightarrow x_2 - x_3 = t(x_1 - x_3)) \quad x_2 = tx_1 + (1-t)x_3 \quad \text{כך נק}$$

$$y_2 - y_3 \leq t(y_1 - y_3) \Leftrightarrow y_2 \leq t y_1 + (1-t) y_3 \quad \text{מתמיחת נוקם ב-}$$

$$y_2 - y_3 \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} (y_1 - y_3)$$

$$m_{23} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \geq \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = m_{13} \quad \checkmark$$

בשלב זה נדע ש $m_{12} \leq m_{13}$ נבחר $0 < u < 1$ כך $x_2 = (1-u)x_1 + ux_3$ נק

ותוצרים בצורך עם אותה ההוכחה

אם f קמורה כימני (אי שוויון מתהפכים!)

טענה: תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ אזי f' עולה (ממש) $\Leftrightarrow f$ קמורה (ממש)

הכרזה: נקח $x_1 < x < x_2$ נושטח f קמורה $\Rightarrow$ משפט 3 העיתרים: f איז צומח

$$f'(x_1) = f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{נקח } x \rightarrow x_1^+ \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\text{נקח } x \rightarrow x_2^- \text{ נקח } \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq f'_-(x_2) = f'(x_2)$$

(מקבל אי שוויון הפוך!)

וכך הרי קיבלנו $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$ מתק"ס f' עולה

נ"ח כי f' עולה ונראה ש f קמורה. שים נקח $x_1 < x < x_2$.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

ממש (לפני * 2): $\exists x_1 < c_1 < x: \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1)$
 $\exists x < c_2 < x_2: \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2)$

המשך

המשך (התכונה)

, $0 < \lambda < 1$, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ (כש) λ

$x - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1)$ (ש) λ λ λ

$x_2 - x = \lambda(x_2 - x_1)$

$\frac{f(x) - f(x_1)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{\lambda(x_2 - x_1)}$ (3) λ λ

$\Downarrow$
 $\lambda f(x) - \lambda f(x_1) \leq (1-\lambda)f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1)$

$\Downarrow$
 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$