

פולינום טימור וטור טימור:

הכנסו: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, פונקציה טימור f ופונקציה f בנקודה x_0 (הכנסו) f ופונקציה f בנקודה x_0

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$$

פונקציה טימור f ופונקציה f בנקודה x_0

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

$P(x)$	$f(x)$	פונקציה טימור (כנסו) $(x_0=0)$
$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x^j$	e^x	
$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{x^n}{n} = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} x^j$	$\ln(1+x)$	
$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$	$\sin x$	

הכנסו: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, פונקציה טימור f ופונקציה f בנקודה x_0

הכנסו: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, פונקציה טימור f ופונקציה f בנקודה x_0

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$g(x) = f(x) - P_n(x)$$

$$g^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x)$$

$$g(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$$

$$C_x = x_{n+1}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$, $f(x) = e^x$ LW 13
 $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f(c_x) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^{c_x} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{\max(x,0)} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} = e^x$ ז"א

כפרט: $e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$

$e - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}) = \frac{e^{c_1}}{720} (1) \leq \frac{e}{720} < \frac{1}{240}$

ובסיומת מתקן $\frac{1}{(n+1)!} > e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e^c \left(\frac{1}{(n+1)!} \right) > \frac{1}{(n+1)!}$

נ"ח מקי"ח e - אי-רציונלי: $\frac{m}{n} = e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$ (קדם), $m, n \in \mathbb{N}$, $e = \frac{m}{n}$
 $\frac{m \cdot n!}{n!} = n! + \frac{n!}{2} + \dots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^c \cdot n!}{(n+1)!}$

$\frac{1}{n+1} < \frac{e^c}{n+1} < \frac{3}{n+1}$ ז"א
 $(\text{P.B. } \frac{e^c}{n+1}) \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{3}{n+1}$

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{1}{(1+x)^k}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $f(x) = \ln(1+x)$ LW 13

$\Rightarrow P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$(-1, 1] \Rightarrow \text{מתקן } (-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

$\therefore \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ שטחים (האם) $x \in (-1, 1]$ מתקנים

מש' השארית של פולינום: $R_n(1+x) - P_n(x) = \frac{f(c_x) \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n! \cdot x^{n+1}}{(n+1)! (1+c_x)^{n+1}}$

$|\ln(1+x) - P_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+c_x} \right)^{n+1}$

$|\ln(1+x) - P_n(x)| = \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+c_x} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1+c_x} < 1 \Leftrightarrow 0 < c_x < x \Leftrightarrow 0 < \lambda \leq 1$

וקיבלנו שטחור $0 < x \leq 1$: $\ln(1+x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$

אבל מקרה 2: $0 < 1+c < 1 \Leftrightarrow x < c < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

וזה יתקן רק אם $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, $x = -\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4} < c_x < 0$, $\frac{1}{1+c_x} < \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

כל $x < -\frac{1}{2}$ מש' השארית של פולינום לא מתקן!!

משפט טיור-האריס: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$

ה- I איז סגור $x \in I$ קיימת $c_x \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))$ כ- p

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x-c_x)^n (x-x_0)$$

1/2 הוכחה: העצרת הנכונה היא ניתן לחסום $|R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ עבור $-1 < x < -\frac{1}{2}$

הוכחת המשפט: נקדם את x פונקציה

$$F(t) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j$$

מתקיים: $F(x_0) = R_n(x)$, $F'(t) = -\sum_{j=0}^n \left(\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!} (x-t)^j + \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j \cdot (-1) \right) = F(x) = 0$

$$= - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!} (x-t)^j + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!} (x-t)^{j-1} = - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1}$$

למשל:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(c) \Rightarrow \frac{0 - R_n(x_0)}{x - x_0} = - \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} (x - c_x)^n$$

כברת!