

24 חדוץ

טורי טימור

הצורה: הנתון 2 פונק' ציחת (מספיק פעמיים) אחי של f חתוכות (שווה)

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad 0 \leq k \leq n$$

טענה: תהיה $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$ מתכונות עם כזו n הנתן x_0

$$(f-g) = O_{x_0}(x-x_0)^n \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-g(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \right) \leftarrow$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad \text{נציב}$$

$$h^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = h'(x_0) = 0 \quad \checkmark \quad n=1 \quad \text{נפי נתון} \quad h(x_0) = h'(x_0) = 0$$

בבסיס: נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, ונבדוק מקרה n :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{(x-x_0)^n} \quad \text{פונק' ו-1 הנקודות שיהיו מואפכות}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0 \quad \text{כעת, מהנתון} \quad h'(x) = O(x-x_0)^{n-1} \quad \text{ונשתמש בהצדקה:}$$

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{(x-x_0)} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

ההוכחה: $x \rightarrow x_0$ כאשר $x_0 \rightarrow x_0$ מנקודת

$$(n \text{ נשים זכ של } - \rightarrow 0 \quad \left| \frac{h'(x)}{(x-x_0)^{n-1}} \right| < \left| \frac{h'(x_0)}{(x_0-x_0)^{n-1}} \right| \quad \text{אכן ניתן לרשום את זה ק})$$

טענה: תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ קטע פתוח, $x_0 \in I$ ו- f צורה n פעמים x_0 .

אזי קיים ויחיד פולינום מכר n ($P_n(x)$) שמתכונ עם f בקר x_0 עם כזו n .

$P_n(x)$ נקרא פולינום טימור מכר n "סביב" x_0

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

הוכחה: הנה רטא:

$$\frac{d^k}{dx^k} \Big|_{x=x_0} \left(\sum_{j=1}^n C_j (x-x_0)^j \right) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ C_k \cdot j! & j = k \end{cases} \quad \text{ונשים זכ של } P_n'(x)|_{x_0} = \frac{f'(x_0)}{1!} + 0$$

$$P_n(x) = f(x) \quad \text{ב} \quad P_n(x)|_{x_0} = f(x_0) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \quad \text{כנפים}$$

ע מודם הוא יחיד $\tilde{P}(x)$ פולינום מכר n כושה שמתכונ עם f

ע כזו n הנתן x_0 נשים זכ של $\tilde{P}$ ניתן להוכיח עם $\sum_{k=0}^n C_k (x-x_0)^k$

$$\tilde{P} = P \quad \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}: C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \Leftrightarrow f^{(k)}(x)|_{x_0} = \tilde{P}^{(k)}(x)|_{x_0} = C_k \cdot k!$$

(כאשר $x_0 = 0$ פשוט טיור נקרא פולינום טיור) $x_0 = 0, f(x) = \sin x$ (1)

מחזרים: $f'(x)|_{x_0} = \cos x \quad f''(x)|_{x_0} = -\sin x \quad f'''(x)|_{x_0} = -\cos x \quad f^{(4)}(x)|_{x_0} = \sin x \dots$

$$\Rightarrow P_n(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(2) $f(x) = \ln(1+x)$ בסיס $x_0 = 0$ $f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \dots f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(1+x)^k}$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{k!} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

(3) $f(x) = e^x$ בסיס $x_0 = 0$ $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

משפט (פאנו): $f: I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I$ גזירה n פעמים ב- x_0 , $P_n(x) = f(x) - P_n(x)$ (שארית טיור מסדר n)

"פונקט טיור שטור" נ-פאנו סק" x_0 יומ מה n $(x-x_0)^n$ $P_n(x) = O_{x \rightarrow x_0}((x-x_0)^n)$

כוחות: נוסח n ציט $n-2$ הסעות הקובעות (טיור מצדקה עם סדר n עם $f(x)$)

שאלה: האם אפשר לוטח משקל עם השארית "סק" רחוקה n x_0 ?

תשובה: כן וכן! פאנו... $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ (מרושט)

נסיג: f גזירה n פעמים ב- 0 $f^{(k)}(x)|_{x=0} = 0$ $k=1$: $f'(x)|_{x=0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{לופ}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{-1/x^2}}{x^3}$
 נוסח $\frac{1}{x^2} = t$: $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2e^{-t}}{t^3} = 0$ (משפט לופט)

פונקט מרזון של $f(x)$ רטו פונקט (האם וצדקה יעל)