

23 חדול

3 ימים יומיים

זירות ב- I, f, a

משפט: תהינה $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I קטע פתוח), ונניח:

ספרות

$$x \in I, f(a) \neq 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (4) \quad \text{הסקור} \quad \text{ק"י"פ} \quad \text{(במקום תחום)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

כלי:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

בזמנאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -1/2$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\cos(x-1) - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{-\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x}}{-\cos(x-1)} = \frac{2}{-1} = -2$$

הערה:

א) כן אם עבור סקור חזר (למשל נניח עבור $x \rightarrow a^+$)

ב) כן אם כושר סקור (4) הסקור ו'3 א $+\infty$ או $-\infty$

ג) חוקי סקור אחר תנאים 1+2 (לדוגמה) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x}{1} = 1 \neq 1$ כל $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x+x^2}{x} = +\infty$

הוכחה:

עבור f, g זירות מוגדרות בקטע a, b כך ש- $f(a) = g(a) = 0$ ו- f, g זירות

זירות ב- I ו'3 רכי תחנו $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

נחשב את $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ו'3 תהי $a < x$ כושר.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

נשתמש במשפט ש'3 קושי בקטע $[a, x]$

התנאים של מיתקנים, ו'3 קושי $a < c < x$

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

אם $x \rightarrow a^+$ אז $c \rightarrow a^+$ ו'3 כושר $a < c < x$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{y \rightarrow a^+} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

(4) והוכחה סגורה

הוכחת (המשפט) 8

נכונות: $L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. יהי $\delta < \epsilon$, ענינו למצוא δ כך שכל $x \in (a, a+\delta)$ נקיים:

$$| \frac{f(x)}{g(x)} - L | < \epsilon$$

$$\frac{\epsilon}{2} > | \frac{f'(x)}{g'(x)} - L |$$

מהצד השני קיים δ_1 כך שכל $x \in (a, a+\delta_1)$ נקיים:

$$a < x < x_0, \quad x_0 = a + \delta_1$$

נשתמש במעטפה $[x, x_0]$ (הצדקה שתתקבל מתיקונים). זכור קיימת

יהי $x < x_0 < x_0$ כך $\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x) - f'(c_{x_0})}{g'(c_x) - g'(c_{x_0})}$ (למנוע נכונות קרוי)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = 0$$

הוא נשאר את ההוכחה, ואזי נוכיח את טענת הדבר:

נבחר $\delta_2 < \delta$ כך שכל $a < x < a + \delta_2$ נקיים $\frac{\epsilon}{2} > | \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} |$ (אם לא)

$$| \frac{f(x)}{g(x)} - L | \leq | \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} | + | \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - L | < \frac{\epsilon}{2} + | \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L | < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(כבר שלם)

הוכחת טענת הדבר (התוצאה המשפט) 8

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{g(x_0) \cdot f(x) - f(x_0) \cdot g(x)}{g(x)(g(x) - g(x_0))} \right| \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x)}{g(x) - g(x_0)} \right| + \lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x_0) g(x)}{g(x)(g(x) - g(x_0))} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left| \frac{f(x) \cdot g(x_0)}{g(x)(g(x) - g(x_0))} \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \right| \cdot \left| \frac{g(x_0)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(x_0) g(x_0)}{g(x_0)(g(x) - g(x_0))} \right|$$

ט"ו

הצבה: תהיה $f, g: I' \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, קטע פתוח I .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

(1) נאמר $f = o(g)$ כאשר $x \leftarrow x_0$ $\Leftrightarrow |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\delta > 0$ $C > 0$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $|f(x)| < \epsilon$

(2) נאמר $f = O(g)$ כאשר $x \leftarrow x_0$ $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(3) נאמר $f = \Theta(g)$ כאשר $x \leftarrow x_0$ $\Leftrightarrow g = O(f)$ $\wedge$ $f = O(g)$ $\Leftrightarrow c' |g| \leq |f| \leq C \cdot |g|$

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \implies \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \frac{1}{2} \quad \text{cons, sk} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

proof pk : plu

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 3\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}L|g| < |f| < \frac{3}{2}L|g| \implies x \rightarrow x_0 \text{ such } f = O(g) \text{ s.k.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$(x_0) = x_0 \text{ s.k. } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$(x) = x \text{ s.k. } x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$