

הקטן בין תחומי עניין/ריבוע של f ובין העצרת:

טענה: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I קטע פתוח, f זכירה ב- I

(1) אם $f'(x) > 0 \forall x \in I$ אז f עולה ממש ב- I

(2) אם $f'(x) < 0 \forall x \in I$ אז f יורדת ממש ב- I

הוכחה: נקח $x < y$ ב- I . נשתמש במשפט לאינטגרל עבור f בקטע $[x, y]$:

$$\exists c \in (x, y) \text{ s.t. } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

כעת אם $f'(c) > 0$ אז $f(y) - f(x) > 0$ ולכן $f(y) > f(x)$

אם $f'(c) < 0$ אז $f(y) - f(x) < 0$ ולכן $f(y) < f(x)$

טענה: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I קטע פתוח. נניח f זכירה ועתה $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{aligned}$$

זכירה!

הערה חשובה: הטענות הן בקטע! לא העצרת חובית כזו! יש בדיקה עזרה ב- f עצרת

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = 0 \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} > 0$$

אם אין בדיקה של f ב- 0 הרי שיש עזרה!

טענה: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ קטע פתוח, $a \in I$, f זכירה פסגים ב- a . וניח $f'(a) = 0$

(1) אם $f''(a) > 0$ אז a נק' מיני מקומית

(2) אם $f''(a) < 0$ אז a נק' מקסי מקומית

(3) אם $f''(a) = 0$ אין אינפורמציה (זכירה ובעזרת טכניקה נוספת)

הוכחה: (3) קו. x^3, x^2, x^4 שונים במחשבות עם התנהלות שונות

$$f''(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a}$$

כעת $f'(x) > 0$ ו- $f'(a) = 0$ אז $f'(x) > f'(a)$ ולכן $f(x) > f(a)$

כעת $f'(x) < 0$ ו- $f'(a) = 0$ אז $f'(x) < f'(a)$ ולכן $f(x) < f(a)$

אם $f'(x) > 0$ ו- $f'(a) = 0$ אז $f'(x) > f'(a)$ ולכן $f(x) > f(a)$

שטענדיג (אָנזעצט אין נח' אי רציפות סא.הר):

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[a, b]$ ואז יהיה (a, b) , ונניח שיש f (הזכור)

$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ ונגזרת ימנית בנקודה $x=a$ היא גזרת f בנקודה a כאשר $f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$

וְהוּא חַי:

$\exists a < c_x < x$, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ - 1991 3-րդ թանկ թանկ $x \in [a, b]$ ԵՃ

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad \text{רק כן עובד } x \rightarrow a^+ \text{ ולא } x \rightarrow a$$

טענה - ממשל דהו (העברת מקומות את חנות עץ והינ"פ)

תהי $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר I קטע פתוח F שזיהה. כלומר $\alpha, \beta \in I$, $\alpha < \beta$

$F'(x^*) = c$ $x^* \in (a, b)$ $F'(b) < F'(a)$ c $\in (F'(a), F'(b))$

הוכחה:

במקרה זה נקרא $C=0$ ונקרא $F'(a) < 0 < F'(b)$

$$\forall x. a-x < a+h_1 \text{ s.t. } \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$$

$$\forall x. b-h_2 < x < b \quad \text{s.t.} \quad \frac{f(b)-f(x)}{b-x} > 0$$

דוגמה 3.2 $\varphi(t) = \frac{f(a+h+t) - f(a+t)}{(a+h+t) - (a+t)} = \frac{f(a+h+t) - f(a+t)}{h}$, נבחר $\delta = \min\{h_1, h_2\} \wedge \delta$
 $b-a-h \geq t \geq 0$ וקבל

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
 נרמון בעזרת פולקס וקצוות:

$$e(b-a-h) = \frac{f(a+h+b-a-h) - f(a+b-a-h)}{h} \cdot \frac{f(b) - f(b-h)}{h} > 0$$

לפי משפט עזק התינ"ד (4) נהפוך $[a-b, b]$ ל $[0, b]$ ונפרק אותו:

$$\exists 0 < t^* < b-a-h. \quad \varphi(t^*) = 0 \Rightarrow f(a+h+t^*) = f(a+t^*)$$

$[a+t^*, a+k+t^*]$: סדרה (מ.צת) f היא Role על מק היא היא

$$\Rightarrow \exists a+t^* < a+h+t^* \quad f'(x^*) = 0$$

! תערה: אפשר צמחיה אי שווינוס ע' מה שטיון קורס.

$$\forall x > 0, \ln(x+1) \geq \frac{x}{1+x} \quad (107) \quad : \text{LNC} 2d$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x+x^2}{x(1+x)^2} \Rightarrow f''(x) > 0, f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

$$= \frac{1+x-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2} > 0; f(0)=0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$$

הפונקציה עולה

המשך חידון 22

בדיווח: מי יותר שטוח

$$e \ln \pi = \ln \pi^e \quad \text{או} \quad e^\pi = \pi^e$$

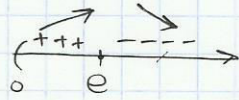
נזכיר: $\ln e^\pi = \pi \ln e$

$$\frac{\ln \pi}{\pi} = \frac{\ln e}{e}$$

נחלק ב- πe

פונקציה: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ בקטע $(0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$$



$\Rightarrow$

הנקודה $x=e$ היא מקסימום של $f(x)$

$\pi^e < e^\pi$ כי $f(e) > f(\pi)$ ופונקציה $f(x)$ יורדת ב- (e, ∞)

אם f היא פונקציה

עולה: אם f' חסומה $\Leftarrow f$ רציפה במ"ש

הפסגה: ממשלם שיהיה M : $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - f'(c_{xy}) \right| \leq M$

ומכאן נובע כי רציפות במ"ש נובעת מהרציפות

!! אפשר למצוא דוגמאות לפסגות:

(1) רציפה ושאם שיהיה M נ"ל

(2) רציפה ושאם M קטן (המרחק העליון)