חדו"א 21:

הגדרות:

תזכורת: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. אם f גזירה מתקיים: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

אם f גזירה ב-(a,b), נקבל $f':(a,b)\to\mathbb{R}$

אם יש f' גזירה, נאמר ש-f גזירה פעמיים ונסמן $(f')'=f''=f^{(2)}$

ובאופן דומה נגדיר (אם יש גזירות): $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)})'$ הנגזרת מס' k של f.

מתקיימת נוסחת לייבניץ לנגזרת של מכפלה: $(f\cdot g)'=f'g+fg'$

$$(f\cdot g)''=(f'g+fg')'=f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg''$$

ובכלליות (מוכיחים באינדוקציה): $\boxed{(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f^{(n-j)}(x)\,g^{(j)}(x)}$

המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי:

הגדרה: תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, ונק' $x_0\in(a,b)$. נאמר ש-x_0 היא מקסימום מקומי

אם קיים $\delta>0$ כך שלכל $y\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ מתקיים $f(y)\le f(x_0)$

נאמר ש-x_0 מקסימום גלובלי אם לכל $x_0\ne y\in(a,b)$: $f(y)\le f(x_0)$

בדומה נגדיר מינימום מקומי ומינימום גלובלי

נקודה שהיא או מינ' מקומי או מקס' מקומי נקראת אקסטרמום מקומי.

של אפורק אם!!

משפט פרמה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח ש-f גזירה ב-(a,b). נניח ש-$x_0\in(a,b)$

היא נק' מקסימום מקומי. אזי $\boxed{f'(x_0)=0}$

הוכחה: נתון ש-f גזירה ב-x_0. כלומר שקיים $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

כי המכנה חיובי

מהנתונים, התמונה כי המכנה אי-חיובי, ומתקיים: $0\ge\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\le 0}}\ge 0$

הביטוי המרכזי הוא $0\ge f'(x_0)\ge 0 \Leftarrow f'(x_0)=0$ ■

⚠ בדומה המשפט נכון עבור נקודת מינימום מקומית!

משפט רול (Rolle): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח:

"משפט ערך קיים דיפרנציאלי"

(1) f רציפה ב-$[a,b]$ (2) f ~~רציפה~~ גזירה ב-(a,b)

(3) כמו כן נניח $f(a)=f(b)$. אזי קיימת נק' $a<c<b$ כך ש- $\boxed{f'(c)=0}$.

הוכחת משפט Rolle:

משום ש-f רציפה ב-$[a,b]$ היא מקבלת שם מינימום ומקסימום (גלובליים) ממשפט ויירשטראס.

נניח שבנקודות x_{max}, x_{min}.

אם שתיהן הן בקצוות (כלומר ב-a או ב-b) אז מתקיים: $\max_{[a,b]} f = f(x_{max}) = f(x_{min}) = \min_{[a,b]} f$

כלומר הפונ' קבועה ב-$[a,b]$ ובפרט לכל $a<c<b$ יתקיים $f'(c)=0$.

כעת נניח אחרת - לפחות אחת משתי הנקודות x_{max}, x_{min} שונה מ-a, b. נסמן אותה ב-c. משום ש-c נק' אקסטרמום גלובלית, בפרט היא נק' אקסטרמום מקומית, ו-$c\in(a,b)$. לכן לפי משפט פרמה $f'(c)=0$ כדרוש! ■

משפט לגרנז': תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ונניח f רציפה ב-$[a,b]$, גזירה ב-(a,b).

אזי קיימת נק' $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

הוכחה: נסמן $\ell(x)=f(a)+(x-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ו- ($\ell'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

נסמן $g(x)=f(x)-\ell(x)$ ומתקיים $g(a)=0$, $g(b)=0$.

בפרט $g(a)=g(b)$. g רציפה ב-$[a,b]$ (הפרש של רציפות) וגזירה ב-(a,b) (הפרש של גזירות). לכן לפי משפט רול קיימת $a<c<b$ כך ש- $g'(c)=0$.

$\Leftarrow$ $f'(c)-\ell'(c)=g'(c)=0$ $\Leftarrow$ $f'(c)=\ell'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ כדרוש! ■

שימושים למשפטי רול ולגרנז':

טענה: תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ונניח $\forall x\in(a,b).\ f'(x)=0$ אזי $\exists c: \forall x\ f(x)=c$

כלומר f קבועה.

הוכחה: יהיו $x,y\in(a,b)$. נניח בה"כ $x<y$ ונפעיל את משפט לגרנז' בקטע $[x,y]$

ונקבל שקיימת נק' $x<z<y$ כך ש- $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)\overset{\text{נתון}}{=}0$, וקיבלנו שלכל $x<y$

מתקיים $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=0$ $\Leftarrow$ $f(y)=f(x)\ \forall x<y$ $\Leftarrow$ כלומר f קבועה.

מסקנה: תהיינה $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ונניח שלכל $x\in(a,b)$, $f'(x)=g'(x)$, אזי:

קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $\forall x.\ f(x)=g(x)+c$

הוכחה: נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$. מחשבון נגזרות $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0\ \forall x$.

ומהטענה $h(x)\equiv c$ כלומר $f=g+c$.

המשך חדו"א 21.3

טענה: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (גזירה) ונ.נ.ח שלכל x מתקיים $f(x)=f'(x)$. אזי קיים $c\in\mathbb{R}$

כך ש- $f(x)=c\cdot e^x$.

הוכחה: נסמן $g(x)=f(x)\cdot e^{-x}$ ונגזור אותה:

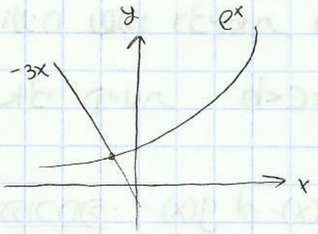
$$g'(x)=f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)(-e^{-x}) \overset{\text{מההנחה}}{=} f(x)(e^{-x}-e^{-x})=0$$ לכל x

⇐ מהמסקנה האחרונה $g(x)=c$ $\forall x$ $\exists c$. כלומר: $f(x)\cdot e^{-x}=c$

$f(x)=c\cdot e^x$ ■

⚠ עבור $f''=-f$ יתקיים $f(x)=a\sin x+b\cos x$, $a,b\in\mathbb{R}$ כלשהם ← תרגיל לבית

טענה: למשוואה $e^x=-3x$ קיים פתרון יחיד ב- $\mathbb{R}$.



פתרון:

· קיום של פתרון למשוואה נעשה במסגרת מלק. נסמן $f(x)=e^x+3x$.

היא רציפה ב- $\mathbb{R}$ ומתקיים: $f(-100)=e^{-100}-300<0$

$f(100)=e^{100}+300$

⇐ קיימת $x\in(-100,100)$ כך ש- $f(x)=0$.

· בשביל יחידות הפתרון: נשים לב: $f'(x)=e^x+3>0$

אם אולו היו שתי נק' $a\neq b$: $f(a)=f(b)=0$, היינו מקבלים לפי רול נק' $a<c<b$

כך ש- $0<f'(c)=0$ בסתירה. כלומר יש פתרון יחיד ל- $f(x)=0$ ■

תרגיל: לפולינום ~~מאא~~ $P(x)$ ממעלה $n\in\mathbb{N}$ יש לכל היותר n שורשים.

פתרון: באינדוקציה

· עבור $n=1$: $P(x)=ax+b$ $\overset{(a\neq0)}{\Leftarrow}$ $ax+b=0$ ⇐ $x=-\frac{b}{a}$

· נ.נ.ח שהראנו נכונות עבור $k=1,2,\dots,n-1$, ויהי P פולינום ממעלה n.

נניח בשלילה שיש לנו (לפחות) $n+1$ שורשים שונים: $x_1<x_2<\dots<x_n<x_{n+1}$ ולכל $1<j<n+1$: $P(j)=0$

ממשפט רול, לכל הקטע $[x_i,x_{i+1}]$ (פול' הם גזירים ורציפים ב- $\mathbb{R}$), לנגזרת $P'(x)$ יש

שורש בקטע זה. נסמן $y_i\in[x_i,x_{i+1}]$ כך ש- $P'(y_i)=0$. קיבלנו n נק' $y_1<y_2<\dots<y_n$

כך ש- $P'(y_j)=0$ $\forall j=1\dots n$. אבל P' הוא פולינום ממעלה $n-1$, ולפי הנחת

האינדוקציה נקבל סתירה! ■

טענה: לכל $0<x\in\mathbb{R}$ מתקיים $1+x<e^x$

הוכחה:
$1+x \overset{?}{<} e^x$
$x \overset{?}{<} e^x-1$
$x \overset{?}{<} e^x-e^0$
$x-0 \overset{?}{<} e^x-e^0$
הנחנו $x>0$
$1 \overset{?}{<} \dfrac{e^x-e^0}{x-0}$

זה היינו קיטוי מהצורה $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(b=x, a=0, f(y)=e^y)$

וכעת נשתמש במשפט לגרנז' עבור f על הקטע $[0,x]$ (רציפה וגזירה). ונקבל:

קיימת $0<c<x$ כך ש- $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{e^x-e^0}{x-0}=f'(c) \rightarrow$

$$\frac{e^x-1}{x}=e^c \underset{\text{מונ' } e^x}{>} e^0=1 \quad ■$$

משפט ערך הביניים הדיפרנציאלי של קושי: תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$

ונניח שהן רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b) וכן $\forall x\in(a,b).\ g'(x)\neq 0$

אזי קיימת $a<c<b$ כך ש- $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}}$

הוכחה: $\psi(x)=f(x)-d\cdot g(x)$ ונבחר את d כך ש- $\psi(a)=\psi(b)$

מהו d?
$$f(a)-d\cdot g(a)=f(b)-dg(b)$$
$$d(g(b)-g(a))=f(b)-f(a)$$
$$d=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$
$g(b)-g(a)\neq 0$ כי אחרת קיימת c כך ש- $g'(c)=0$

ψ רציפה ב- $[a,b]$, גזירה ב- (a,b) וההפרש שם כנ"ל.

ממשפט רול קיימת $a<c<b$ כך ש- $\psi'(c)=0 \Leftarrow f'(c)=d\cdot g'(c)$ ■