

חדולים 20 =

תכונות: f שזירה ב- x_0 אם קיים (הסקור):

$$(f'(x_0) :=) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

חשבה → צוטא: $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (אם היא שזירה)

כאן נק' $x_0 = 0$ היא שזירה (חשבו פה שזירות):

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \sin(\frac{1}{h}) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{h}) = \text{לא קיים}$$

יש נשים זכר בן הסקנות הרבה צדדים + צדכיות כי טו קיים (הסברות):

$$y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, x_n = \frac{1}{\pi n}$$

דיפרנציאליות

פולינום מסדר n זה:

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

הפולינום $P_n(x)$ הוא קירוב מסדר n של f בנק' x_0 אם:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = 0 \quad (\text{ק"פ})$$

הצורה: f נקראת דיפרנציאלית בנק' x_0 אם f רציפה ב- x_0 וכן $f'(x_0)$ קיים

יש $f(x) = ax + b$ מהווה קירוב מסדר 1 של f בנק' x_0 .

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x - x_0} = 0 \right)$$

אם f שזירה ב- x_0 אז f דיפרנציאלית ב- x_0 .

העמתי נ"ח f שזירה ב- x_0 , טונו f רציפה ב- x_0 .

נראה שהישר $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ מהווה קירוב מסדר 1 של f בנק' x_0 .

אכן $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$ (הסקנות קיימים כי הנחנו שהיא שזירה).

נ"ח כעת כי f דיפרנציאלית ב- x_0 (כ"ו) f רציפה ב- x_0 וקיים $f'(x_0)$.

קירוב מסדר 1 של f בנק' x_0 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x - x_0} = 0$

נשים זכר שמתקיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = ax + b$ (אם המונה $\neq 0$ הנשר $\neq 0$ - כי המונה $\neq 0$).

מציא שן f רציפה ב- x_0 $f(x_0) = ax_0 + b$

כעת נבדוק שזירות (של f בנק' x_0):

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - ax + ax - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (ax+b) + ax - ax_0 + ax_0 - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (ax+b)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax - ax_0}{x - x_0} = 0 + a = a$$

(הסקנות אכן קיימים אם הנחה)

תוצאה: אם f דיפרנציאלית ב- x_0 אזי f רציפה ב- x_0 (אם, הוסיפה היא השזירה, הוסיף המקור)

חשבון דיפרנציאציה

אם f, g עזירות ב- x_0 אזי $f \pm g, f \cdot g, f/g$ עזירות ב- x_0 וקו נגזרת:

$$(1) (f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(2) (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

$$(3) (f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$(1) (f \pm g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \pm g)(x) - (f \pm g)(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{קו נגזרת}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(2) (fg)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$$

$$(3) (f/g)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left[g(x_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ \stackrel{\text{נשתמש ב-}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

טענה: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I פתוח, f רציפה מונוטונית חזק ב- I וניח כי f עזירה בקו

$x_0 \in I$ וכן $f'(x_0) \neq 0$. אזי $f^{-1}: J \rightarrow I$ (כאשר $J = f(I)$) עזירה ב- $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{או באופן שקול} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

וכן נחזיר:

(הוכחה: קובעים את העזרת העזרת)

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \stackrel{\text{קו נגזרת}}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\stackrel{\text{שנינו, } f \text{ ו-} f^{-1} \text{ חזק חזק עזירות}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

איתחלנו את f, f^{-1} (הפך חזק חזק עזירות) (הוכחה)

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$$

נסתה:

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$$

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} = e^x \quad \text{נסתה:}$$

החשך חדוד 20

$$\text{שכח } \arcsin x' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Leftarrow$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

כף השרשרת

תהי f מוגדרת בקביעת u של הנק' x_0 , ויהי g מוגדרת בקביעת v של הנק' $f(x_0)$. נניח כי f עברה ב- x_0 , וכן g עברה ב- $y_0 = f(x_0)$. אזי ההרכבה $g \circ f$ עברה ב- x_0 , ונקח את

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

הוכחה: נגדיר $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ כזו:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & y = y_0 \end{cases}$$

נשים לב: $\forall y \in V: g(y) - g(y_0) = h(y) \cdot (y - y_0)$

בנוסף, קיים הערכה: $\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = g'(y_0)$ שבה נתון f עברה ב- x_0 , ו- h עברה ב- y_0 .

כעת נגדיר h עברה ב- y_0 , וכן g עברה ב- y_0 , ונקח $y = f(x)$, נקבל:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = g'(y_0) = g'(f(x_0))$$

שהפונקציות $h \circ f$ ו- h עברה ב- x_0 והערכה ק"ד.

כעת כדי להוכיח שזהות נכונה הנשערת:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$