

גידולים - שיטת 2

הצגה: $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה לא ריקה של מספרים. מספר M המקיים

$$\forall x \in A, x \leq M \quad \text{נקרא} \quad \text{חסם מרבי} \quad \text{של קבוצה } A.$$

מספר m שמקיים $\forall x \in A, x \geq m$ נקרא חסם מינימי של A .

קבוצת כל חסמי המעלה של A תכונה $\bar{A}$ -

קבוצת כל חסמי המורד של A תכונה $\underline{A}$ -

$$\text{זבזגו: } (1, 3) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\} \quad \text{חסמה על איברים שלא בקבוצה.}$$

הצגה: מספר $M \in A$ הצגה מס איברי הקבוצה $(\forall x \in A, x \leq M)$ נקרא המקסימום של A .

מספר $m \in A$ הקטן מס איברי הקבוצה $(\forall x \in A, m \leq x)$ נקרא המינימום של A .

אקסיומת השלמות

כל קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה וחסמה מעלה יש חסם מעלי קטן ביותר.

(עבור $A \subseteq \mathbb{R}$ כך $\bar{A} \neq \emptyset$ קיים $\min \bar{A}$). $\leftarrow$ שקול דבר לחסמי מעלה

Δ זו אינה טענה, זו אקסיומה, והיא מעבירה את המספרים הממשיים (כך שבה כזו המהות אורה הוא בעצם המספרים הממשיים).

הצגה: עבור קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה וחסמה מעלה נעזיר

$$\sup A = \min \bar{A} \quad \text{סופרמום של } A.$$

עבור קבוצה כזו וחסמה מעלה נעזיר $\inf A = \max \underline{A}$ - אינפמום של A .

תרגילים

1) אם $S \subseteq \mathbb{R}$ ו- $\emptyset \neq S$ יש מקסימום M אוזי המקסימום שלה. הנו

$$(M = \sup S) \quad \text{הסופרמום שלה}$$

$$\text{2) מהו } \sup(1, 3) = ?$$

הסבר / הוכחה

1) נתון $M = \max S$ וזמן $x \in S, x \leq M$ חסם מעלי של S .

לא "תכן" שיש חסם מעלי קטן מ- M כי $M \in S$.

$$\text{זמן זה הצגה } M = \sup S.$$

$$\text{2) } \sup(1, 3) = 3 \quad \text{אולי הצגה } \forall x \in (1, 3), x < 3 \quad \text{נבחר } \alpha < 3 \quad \text{נבחר } \alpha < 3 \quad \text{נבחר } \alpha < 3$$

כך נראה ש- $\alpha \in \mathbb{R}$ הוא חסם מעלי של $(1, 3)$ קטן מ- 3 . (תכונה) $\frac{\alpha+3}{2} < 3$ $\frac{1+3}{2} < \frac{\alpha+3}{2} < \frac{3+3}{2} = 3$ $\alpha < \frac{3+\alpha}{2} \in (1, 3) \leftarrow$ סתירה זקק ש- α חסם מעלי של $(1, 3)$.

טענה 3 $A \subseteq \mathbb{R}$ חסמה ממש ויהי $b \in \mathbb{R}$ חסם ממש של A .

אזי הטענות הבאות שקולות:

1. $b = \sup A$ ($b = \min B_A$)

2. לכל חסם ממש d של A מתקיים $b \leq d$

3. אם $c < b$ אזי c אינו חסם ממש של A .

מסקנה: $A \subseteq \mathbb{R}$ חסמה ממש אם הטענה הבאה שקולה לקוביות:

4. $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ s.t. } a > b - \varepsilon$

למה אקסיומת השלמות?

טענה: לכל מספר ממשי חיובי יש שניים $(\forall c > 0 \in \mathbb{R} \exists 0 < b \in \mathbb{R} : b^2 = c)$

הכח: נתבונן בקטגוריה $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x, x^2 \leq c\}$

נשים לב ש- $A \neq \emptyset$ (למשל $0 \in A$), וכן A חסמה ממש למעלה ב- $c+1$.

אכן $x^2 \leq c < c+1 \leq (c+1)^2 \quad \forall x \in A \Leftrightarrow x < c+1$ (נוסף מהתכונות של יחס סדר)
 $[a > b, c > d \Rightarrow ac > bd]$

ואכן לפי אקסיומת השלמות קיים $\sup A$. נמנה b ונראה ש- $b^2 = c$.
 מתיכונות של יחס הסדר או $b^2 < c$ או $b^2 > c$ או $b^2 = c$ (נראה מהשכונות)

אם $b^2 < c$ ונראה שקיים $r > 0$ כך ש- $(b+r)^2 < c$.

אכן $(b+r)^2 < c \Leftrightarrow b^2 + 2br + r^2 < c \Leftrightarrow 2br + r^2 < c - b^2$
 חזרה לפי ההנחה $2br + r^2 < c - b^2$
 אם $r < 1$ אז $2br + r^2 < 2br + r = r(2b+1) \leq c - b^2$

נבחר $r = \frac{c-b^2}{(2b+1)^2} > 0$ (אם $c-b^2 > 0$)

קייבנו ש- $b+r \in A$ ו- $b < b+r$ סתירה לפי ש- b הוא חסם ממש של A .

אם $b^2 > c$ נבחר $r > 0$ כך ש- $(b-r)^2 < c$.
 מן נקודת סתירה לפי ש- $b = \sup A$.

זהו סעיף 1.10 בספר
 של ג'ון ג'ון

$\Downarrow$
 $b^2 = c$ והוא ק"פ, N .