

חידון 19

משפט הקטגוריה של זרמלס: תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ($a, b \in \mathbb{R}$) כזו ש
 f זרמלס פונקציה - $[a, b]$.

הוכחה: נניח השערה ש- f לא חציבה במ"ש. כלומר, קיים $\varepsilon_0 > 0$ וקשר $n \in \mathbb{N}$

$$\cdot \text{ If } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n, y_n \in I \quad \text{ then } f \text{ is not continuous.}$$

אנחנו, BW, נשים לב $a \leq x_n \leq b$ (כזרה חסומה), θ זה תוספתות $x_n \rightarrow x$

כל $a \leq x_n \leq b$ מסקנות: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{n}$ מתק"פ, $x_n - \frac{1}{n} \leq y_n \leq x_n + \frac{1}{n}$ מתכנסות.

אמנצב. פ' קיבול $y_n \rightarrow x$

מרחיפות f ב- x_0 : $f(x_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x_0)$ וכן $f(y_{n_j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x_0)$ וכן $|f(x_{n_j}) - f(y_{n_j})| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

!! הערה: אם $I \neq I'$ ו- f זיפה קטן על I אך $f|_{I'}$ זיפה קטן על I' ! סתירה! $\square$ $\Leftarrow$ ε

יחסי להיות $\sim$ - סה"כ

טעם (סתירות): יהי $f: (a, c) \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in (a, c)$ וניח $f|_{(a, b]}, f|_{[b, c)}$ רציפות.

৩০.৩৭ f-1

משפט: יהי $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אז קיים נקודה $c \in [a,b]$ כזו ש- $f(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{or} \quad f(a^+)$$

הוכחה:

$\Rightarrow$ ע"י טק"ס העקום $R \ni L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, ונראה רציפות בנקודה a . נגדיר: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ L, & x = a \end{cases}$
 $\tilde{f}$ מוגדרת על קטע סגור והיא רציפה $\Leftarrow$ לממשפט קטעור היא רציפה בנקודה a .

! 237, 237' 237 p p f = \tilde{f}|_{[a,b]} 237

⌊ $\Rightarrow$ f רציפה במ"ש ונאמר שקיים (הקטן הנ"ל). תהי סדרה $a < x_n \leq b$

צ"ע - $x_n \rightarrow a$ ונגזרת פ"ת (סדר) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ נשוא x_n מתקפת (7)

30. קושי, פתרון $y = f(x)$ היא פונקציה קושי $(\forall \epsilon > 0 \exists \delta)$

לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כזה, שכל $n, m \in \mathbb{N}$ עם $n, m \geq N$ נקבל

כאן פ' מתחיל ע-ס. (שמעש בקר ע-ל ח' כזית חש' כז' N3NS N. N. פ' ע' ח' ח' ח')

כל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שכל x המקיים $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. (הצגה)

$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)$ בסדר $x_n \rightarrow a^+$. יותר מדויק, אם x_n וחסם a כזה ש- $x_n \rightarrow a^+$

העקבות $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ כל כ (העקבות הנ"ל) $\neq$ קבוע: אלא $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ קבוע

1st $f(g_n)$ 2nd $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_n, \tilde{x}_2, \tilde{x}_2, \dots) \rightarrow a^+$ 3rd $f(\tilde{x}_n) \rightarrow L_2$ 4th $f(x_n) \rightarrow L_1$ 5th $\tilde{x}_n \rightarrow a^+ \rightarrow x_n \rightarrow a^+$

מתקבל. וזה מהצד השני (הקטן) של הנקודה המסומנת (הנקודה) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

כוסות
רצות
כמה:
כוסות
כוסות
כוסות
כוסות
כוסות

משפט: תהי $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ק"פ. אז $L = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ויחיד $L \in \mathbb{R}$

אזי f רציפה במ"ש $[a, \infty)$.

⚠️ הערה חשובה: זה לא $N(x)$! ישנו פונקציה נוספת $N(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \Delta} f(x) \quad -0.70$$

$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{3}$ כי $x > M$ וכל γ , $0 < M$ כך $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.
הוכחה: נניח $\epsilon > 0$.

הנוכחי, הקטע $[a, M]$ ירצה וכן ממשיך קטור, ירצה הא"ש.

נניח כי $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3}$, $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ ויש כך $0 < \delta$ כן

כעת יהיו x, y כושלים ב- $[a, \infty)$ ו- $|x - y| \leq \epsilon$, קי"מ 3 נקרא:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \delta \text{ m.m.d.N. s.k. } x, y \in [a, M] \quad (1)$$
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(M) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |f(M) - L| + |L - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{for } a \leq x \leq M < y \quad (2)$$

$M \in (x, y) \wedge |x - y| < \epsilon \Rightarrow |x - M| < \epsilon$
 M מתקרב לסדרה $\rightarrow \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

$$\triangle \quad |f(x) - f(y)| \stackrel{!}{\leq} |f(x) - L| + |L - f(y)| \underset{M \rightarrow \infty}{\stackrel{\uparrow}{\leq}} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \quad \forall x, y \in M \quad (3)$$

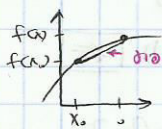
משפט: יהי $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה קבועה, אז f היא פונקציה

דוגמה: $f(x) = \begin{cases} L_1 & x=a \\ f(x) & a < x < b \end{cases}$ אז $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_2$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$

$\tilde{f}$ פונקציה רציפה וממשל ויירשטראס f חסומה f חסומה

Derivatives - 2019-2020

(הצגה): תהי $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ ותהי $x_0 = (a,b)$. הומוגרף של f בנקודה x_0 .



$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

מאצרת זהירות הצקות הטא כמיצה וילא ק"פ:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

צריך נוספת ובהנחות העקום 3

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} : \text{הצבה - נגזרת כיוונית / שמאל}$$

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(p. 110) (p. 111) $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Leftrightarrow x_0$ - נקודת פיתול

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

!! משמעות פונקציות/מרחב: $\chi(t)$ מרחב. מרחב מרחב - $[t_0, t_1]$.

$$v(t_0) = x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5-5}{h} = 0 \quad f(x) = 5 \quad \textcircled{*} \quad \text{נחלק ב-0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x+x_0) = 2x_0 \quad f(x) = x^2 \quad \textcircled{*}$$

$\downarrow$
 $f'(x) = 2x$

$$2 = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad f(x) = |x| \quad \textcircled{*}$$

$\downarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

3050 333-377 לפי ה-0-0 $\leftarrow$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = 1 \quad x_0 > 0 \text{ כל } x_0 \neq 0 \text{ נכון}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1 \quad x_0 < 0 \text{ כל}$$

$x \rightarrow x_0 < 0$ נכון

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x_0 + \frac{h}{2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{h}{2}} \cdot \sin(\frac{h}{2}) \cdot \cos(x_0 + \frac{h}{2}) \quad f(x) = \sin x \quad \textcircled{*}$$

$\uparrow$
 $\sin b - \sin a = 2 \sin \frac{b-a}{2} \cos(\frac{b+a}{2})$

$\uparrow$
 $\Rightarrow 1 \cdot \cos x_0 \Rightarrow f'(\sin x) = \cos x$

נכון 377-377, 377

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad x_0 > 0 : [0, \infty) \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \textcircled{*}$$

$\Rightarrow f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow \text{! אין נגזרת בנקודה } x=0$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = \ln \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \ln e = 1 \quad (תחום הנגזרת) : (0, \infty) \quad f(x) = \ln x \quad \textcircled{*}$$

נכון 377-377

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{1}{x-x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(\frac{x_0 + (x-x_0)}{x_0} \right)^{\frac{1}{x-x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right)^{\frac{1}{x-x_0}}$$

$y = \frac{x-x_0}{x_0} \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \ln \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x-x_0} \cdot \frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \ln \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{x-x_0}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

כל x_0 - נגזרת f כל $x_0 \in (a,b)$, $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ תהי

f נגזרת ב- x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

(הוכחה)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{כל}$$