הרצאה 18

תזכורת: ⊛ משפט ויירשטראס: f רציפה ב- $[a,b]$ ⇐ יש לה נק' מקס', מינ' (משתנות)

⊛ משפט ערך הביניים: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, אז לכל מספר t בין $f(a)$ לבין $f(t)$ קיים $a\le c\le b$ כך ש- $f(c)=t$.

מסקנה ראשונה: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. נסמן $\overset{\mathbb{R}}{m}=\min\limits_{[a,b]} f$, $\overset{\mathbb{R}}{M}=\max\limits_{[a,b]} f$.

מתקיים: $f([a,b])=[m,M]$

$\{f(x):a\le x\le b\}$

הוכחה: מסקנה מיידית משני המשפטים. את מש"ב (משפט ערך ביניים) נפעיל על הקטע בין X_{min} לבין X_{max}.

$$f([a,b])\subseteq[m,M]$$ (הגדרת ויירשטראס + הגדרה (נובע ש-)

$$[m,M]\subseteq f([a,b])$$: הפעלת מעב"ב על הקטע בין X_{min} ל- X_{max}

(יש שוויון)

⚠ ניתן לאמר: "תמונה רציפה של קטע סגור היא קטע סגור"

אבל תמונה רציפה של קטע פתוח יכולה להשתנות:

⊛ $f=\sin x;\ f[(-\pi,\pi)]=[-1,1]$

⊛ $f(x)=x^2;\ f((-1,1))=[0,1)$

⊛ $f(x)=\frac{1}{x},\ f((0,1))=(1,+\infty)$

⊛ $f(x)=\arctan x,\ f((-\infty,\infty))=(-\pi/2,\pi/2)$

הגדרה: קטע מוכלל זו תת הקבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ שמקיימת:

אם $x\in A$ ו- $y\in A$, ו- $0<t<1$ אזי $(1-t)x+ty\in A$

"ממוצע משוקלל"

(אומרים גם A קמורה).

! זה בדיוק יוני: (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, (a,∞), $[-\infty,a)$, ... , $\mathbb{R}$.

מסקנה נוספת מעב"ב: f רציפה ו- I קטע מוכלל ⇐ $f(I)$ גם קטע מוכלל.

הסבר: אם $x,y\in f(I)$ I ו- $0<t<1$ אזי $(1-t)f(x)+tf(y)$ הוא בין $f(x)$ לבין $f(y)$, ומעב"ב: יש נק' c בין x לבין y כך ש- $f(c)=(1-t)f(x)+tf(y)$

משום ש- I קטע מוכלל גם $c\in I$ ⇐ $f(c)\in f(I)$ ☒

הפיכות ורציפות 8

למה: תהי $f: I\to\mathbb{R}$, f רציפה ו- I קטע מוכל. אם (ורק אם) f חח"ע אזי f מונוטונית (חזקה).

הוכחה: נניח בשלילה f לא מונוטונית, כלומר בה"כ קיימים $x_1<x_2<x_3\in I$ כך ש- $f(x_1)<f(x_2)>f(x_3)$. נבחר מספר $t\in(f(x_1),f(x_2))\cap(f(x_3),f(x_2))$.

ממע"ב בקטע $[x_1,x_2]$ קיים y_1 כך ש- $f(y_1)=t$
ממע"ב בקטע $[x_2,x_3]$ קיים y_2 כך ש- $f(y_2)=t$
אבל $y_1\neq y_2$ וזו סתירה לחח"ע ■

טענה: יהי I קטע מוכל ותהי $f:I\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית חזק אזי f הפיכה. צ"ל אם נסמן $J=f(I)$ אזי J קטע מוכל, $f^{-1}:J\to I$. יתר על כן f^{-1} רציפה.

הוכחה: כיוון שראינו ש- $J:=f(I)$ קטע מוכל
$f:I\to J$ מונו' חזק (בה"כ f עולה) ⇐ חח"ע, ועל (מהגדרת J). בפרט קיימת $f^{-1}:J\to I$.
צ"ל: f^{-1} רציפה. יהי $y_0\in I$, נסמן $f^{-1}(y_0)=x_0$. תהי $y_n\to y_0$,
וצ"ל $f^{-1}(y_n)\overset{\text{נסמן}}{=}x_n\to x_0$. נניח בשלילה ש- $x_n\not\to x_0$. אזי קיים ε_0 שעבורו קיימים
אין סוף אינדקסים, n_k כך ש- $|x_{n_k}-x_0|>\varepsilon_0$. בה"כ נניח שיש אין סוף אינדקסים
n_k כך ש- $x_0+\varepsilon_0<x_{n_k}$. ממונוטוניות $f(x_{n_k})>f(x_0+\varepsilon_0)$.
כלומר: $y_{n_k}=f(x_{n_k})>f(x_0)+\delta_0=y_0+\delta_0$. קיבלנו שיש אין סוף אינדקסים
n_k כך ש- $y_{n_k}>y_0+\delta_0$ בסתירה לכך ש- $y_n\to y_0$ ■
מסקנה: $x_n\to x_0$ וצ"ל f^{-1} רציפה.

דוגמאות:
* $\sin x:[-\pi/2,\pi/2]\to[-1,1]$ היא הפיכה ורציפה וההופכית שמסומנת ע"י $\arcsin x:[-1,1]\to[-\pi/2,\pi/2]$ רציפה.

! $x\in[-1,1]$. אז $\sin(\arcsin x)=x$ אבל $\arcsin(\sin x)=x$ רק עבור $x\in[-\pi/2,\pi/2]$

* $\cos x:[0,\pi]\to[-1,1]$, $\arccos x:[-1,1]\to[0,\pi]$ - שתיהן מונו' יורדות (אם הפונ' יורדת גם ההופכית יורדת).

* $\tan x:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$, $\arctan x:\mathbb{R}\to(-\pi/2,\pi/2)$ רציפה.

המשך שיעור חדו"א 8/18

טענה: יהי $0<a$. הפונ' a^x רציפה (ב- $\mathbb{R}$)

למה: אם $h_n\to 0$ אזי $a^{h_n}\to 1$.

הוכחה: נשתמש בכך ש- $\left.\begin{matrix} a^{1/n}\to 1 \\ a^{-1/n}\to 1\end{matrix}\right\}$ טענות מסדרות.

יהי $\varepsilon>0$. מהטענות על סדרות קיים n_0 כך ש- $1-\varepsilon<a^{-\frac{1}{n_0}}, a^{\frac{1}{n_0}}<1+\varepsilon$.

כעת משום ש- $h_n\to 0$, קיים n_1 כך שלכל $n_1<n$ $-\frac{1}{n_0}<h_n<\frac{1}{n_0}$.

וממונו' a^x נקבל: $a^{-1/n_0}<a^{h_n}<a^{1/n_0}$ ($a>1$)

$a^{1/n_0}<a^{h_n}<a^{-1/n_0}$ ($0<a<1$)

ונקבל ש- $|a^{h_n}-1|<\varepsilon$ לכל $n>n_1$ כלומר: $a^{h_n}\xrightarrow{n\to\infty}1$ ■

הוכחת הטענה:

תהי $x_0\in\mathbb{R}$, $x_n\to x_0$. צ"ל: $a^{x_n}\to a^{x_0}$

נסמן: $h_n=x_n-x_0$ אזי מתקיים $h_n\to 0$, לפי הלמה: $\frac{a^{x_n}}{a^{x_0}}=a^{x_n-x_0}=a^{h_n}\to 1$

נכפול ב- a^{x_0} ונקבל $a^{x_n}\to a^{x_0}$ ■

⊛ $a^x:\mathbb{R}\to(0,\infty)$. הפונ' ההופכית: $\log_a x:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה.

(e^x מקרה פרטי, $\log_e=\ln$)

מסקנה: $a_n\to a$, $b_n\to b$ אזי $a_n^{b_n}\to a^b$.

הוכחה: נשים לב ש- $a_n^{b_n}=(e^{\ln a_n})^{b_n}=e^{(\ln a_n)b_n}$

מרציפות של $\ln$: $\ln a_n\to\ln a$. מתקיים: $b_n\ln a_n\to b\ln a$

מרציפות e^x: $e^{b_n\ln a_n}\to e^{b\ln a}\iff a_n^{b_n}\to a^b$ ■

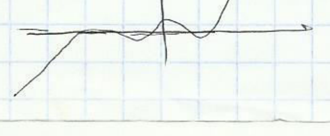
⚠ בהנתן f,g חיוביות רציפות, רצו להראות ש- f^g רציפה (נראה ש- $f^g=e^{g\cdot\ln f}$)

ומחשבון סכום רציפות ורציפות e^x נקבל f^g רציפה.

דוגמא לשימוש במע"ב: לכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש (הוא מתאפס).

כי לדוג', $100x^{17}+x^6+30x^2+5$, ראשו: $x\to\infty$, $f(x)\to\infty$

$x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$



וממע"ב קיים x_1 כך ש- $f(x_1)=0$.

רציפות במ"ש = במידה שווה

הגדרה: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ (עפ"ר: קטע מוכלל). $f:A\to\mathbb{R}$ נקראת **רציפה במ"ש**

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם: $|x-y|<\delta$ אזי $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

⚠ אין מה לדבר על רציפות במ"ש בנקודה!

⚠ הבדלו בין הגדרת רציפות: רציף: $\ldots\forall y\forall\varepsilon\exists\delta$; רציף במ"ש: $\ldots\forall\varepsilon\exists\delta\forall y$ } הוחלפו סדר הכמתים!

⇐ פונ' רציפה במ"ש היא בפרט רציפה! ההבדל העיקרי: בהינתן $\varepsilon>0$ צריך למצוא $\delta>0$ שיתאים להגדרת הרציפות לכל הנק' בו זמנית!

דוגמא: $f(x)=x^2$ היא רציפה במ"ש בקטע $[0,20]$.

$A=[0,20]$. $|x^2-y^2|=|x+y||x-y|\le 40|x-y|$

לכן אם $\frac{\varepsilon}{40}>|x-y|$ אזי $|x^2-y^2|<\varepsilon$ כלומר יש רציפות במ"ש!

אבל $f(x)=x^2$ בקטע $(-\infty,\infty)$ לא רציפה במ"ש!!

(משום שלכל δ שנבחר, אפשר לבחור את: $x=n$, $y=1/n+n$, ו-n מספיק גדול כך ש- $1/n<\delta$.)

$$y^2-x^2=2+\frac{1}{n^2}>2:=\varepsilon$$

דוגמא נוספת: $f(x)=1/x$ בקטע $(0,1)$ לא רציפה במ"ש

הערה: כדי לשלול רציפות במ"ש מספיק למצוא $\varepsilon_0>0$ ושתי סדרות $x_n\in A$ ו- $y_n\in A$, כך ש- $|x_n-y_n|\to0$ אבל $\varepsilon_0\le|f(x_n)-f(y_n)|\not\to0$.

(כמו $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+100}$. $|x_n-y_n|\to0$ אבל כאן $|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_n}|=100\not\to0$.

משפט קנטור על רציפות במ"ש: תהי $f:\overbrace{[a,b]}^{\text{קטע סגור וחסום!!}}\to\mathbb{R}$ רציפה אזי f רציפה במ"ש.