חדו"א 1

תזכורת: רציפות: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ו-$x_0\in(a,b)$, f רציפה ב-x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$f:[a,b)\to\mathbb{R}$ רציפה ב-a אם $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

ראינו דוג' לפונק' רציפות והן $\sin x, \tan x$, $\cos x$, פולינומים, מנות של פולינומים

דוגמא: $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & ; x\ne 0\\ 1 & ; x=0\end{cases}$ תחום ההגדרה $=\mathbb{R}$. נראה שהיא רציפה בכל $x_0\in\mathbb{R}$:

אם $x_0\ne 0$: $\sin x$ רציפה ב-x_0, x רציפה ב-x_0 ולכן מחשבון רציפות $\frac{\sin x}{x}$ רציפה ב-x_0, וסביב x_0 f מוגדרת לזהות $\frac{\sin x}{x}$.

אם $x_0=0$: צריך להוכיח ש-$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(0)$. כלומר צ"ל ש- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

ראינו בשיעור שעבר: $|\sin x|\le|x|\le|tg x|$ $\quad x\in(-\pi/2,\pi/2)$

נראה $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, מזוגיות מספיק להראות $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. כעת נשתמש בסנדביץ': $0<x<\pi/2$

$$\underset{\substack{\downarrow x\to 0^+\\ \cos 0}}{\cos x}=\frac{\sin x}{tg x}\le\frac{\sin x}{x}\le\underset{\substack{\downarrow x\to 0^+\\ 1}}{\frac{x}{x}=1}$$

(רציפות cos בנק' 0)

⇐ מסנדביץ' $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ $\overset{\text{זוגיות}}{\Rightarrow}$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

טענה: תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ מונ' עולה. אזי הגבול הנ"ל קיים (יכול להיות $+\infty$): $\lim_{x\to b^-}f(x)$. יתר על כן, הגבול הזה שווה ל- $\sup_{x\in(a,b)} f(x)$.

וגם: $\lim_{x\to a^+}f(x)=\inf_{(a,b)}f(x)$

הוכחה: נניח ראשית $\sup_{(a,b)} f=L<\infty$. יהי $\varepsilon>0$. צ"ל קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in(b-\delta,b)$ אזי $[\,L-\varepsilon\le f(x)\le L\,]$

מתקיים $\sup_{(a,b)} f>L-\varepsilon$ ולכן קיים $x_1\in(a,b)$ כך ש- $L-\varepsilon<f(x_1)$.

נסמן $x_1=b-\delta$ (כלומר $\delta=b-x_1$) וממונוטוניות לכל $x\in(b-\delta,b)$: $L-\varepsilon<f(x_1)<f(x)\le L$

קיבלנו $\lim_{x\to b^-}f(x)=L$.

כעת $L=+\infty$, כלומר f לא חסומה ב-(a,b). יהי $0<M\in\mathbb{R}$. מאי חסימות

קיים $x_1\in(a,b)$ כך ש- $f(x_1)>M$, וממונוטוניות אם $x_1<x<b$ אזי $M<f(x_1)<f(x)$

ולכן (נסמן $x_1=b-\delta$), אם $x\in(b-\delta,b)$ אזי $f(x)>M$ כלומר $\lim_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. ■

⚠ **הערה:** ~~ההוכחה~~ הטענה תקפה גם בקטע אינסופי $[a,\infty)$!

מסקנה: תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ עולה ותהי $x\in(a,b)$ אזי יתקיים אחד מהשניים:

(1) f רציפה ב-x_0 (2) ל-f גבולות חד צדדיים שונים ב-x_0 ⇐ אי רציפות ממין ראשון בקפיצה!

הוכחת הטענה: נביט ב- $f|_{(a,x_0)}$ (כלומר $f|_{(a,x_0)}:(a,x_0)\to\mathbb{R}$) - $x_0\in(a,b)$

היא ~~מונוטונית~~ מונ' עולה, והיא חסומה מלמעלה ע"י $f(x_0)$, ולכן מהטענה הקודמת קיים

וסופי $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$. מצד שני, נביט ב- $f|_{(x_0,b)}$, אזי קיים הגבול

$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ והוא גם סופי כי $f|_{(x_0,b)}$ חסומה מלמטה ע"י $f(x_0)$

קיבלנו שהגבולות החד"צ קיימים וסופיים ולכן או שהפונק' רציפה, או אי-רציפות

סוג I (לא ייתכן אי רציפות סליקה בגלל מונ' הפונק') ■

$x^\alpha:(0,\infty)\to(0,\infty)$

מסקנה: יהי $\alpha\neq0$, אזי הפונק' x^α רציפה בתחום הגדרתה.

הוכחה: כבר טענו ש-x^α היא הפיכה ($x^{1/\alpha}$ ההופכית שלה), ובפרט

~~היא~~ היא על $(0,\infty)$. בנוסף טענו ש- x^α מונוטונית.

מהמסקנה האחרונה נובע שלכל $x_0\in(0,\infty)$ קיימים $\lim_{x\to x_0^+}x^\alpha=L^+$, $\lim_{x\to x_0^-}x^\alpha=L^-$.

אילו הגבולות החד"צ היו שונים, אזי כל הערכים בין $[L^-,L^+]$ למעט אחד (x_0^α)

לא היו מתקבלים (הפונ' מונוטונית)! זו היא סתירה ל"על" ⇐ הפונ' רציפה. ■

תכונות גלובליות של פונ' רציפות

משפט ויירשטראס: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. (!) חשוב: $[a,b]$ סופי וסגור!

אזי f חסומה ומשיגה את חסמיה, כלומר קיימים $x_{min},x_{max}\in[a,b]$ כך

שלכל $a\le x\le b$: $m:=f(x_{min})\le f(x)\le f(x_{max})=:M$.

הוכחה: נוכיח רק עבור max:

נוכיח קודם כל חסימות מלעיל: נניח ש- f לא חסומה. נבנה סדרה $a\le x_n\le b$

כך ש- $n<f(x_n)$. משום ש- $a\le x_n\le b$ סדרה חסומה, מ-BW יש לה ת"ס

שמתכנסת: $x_{n_j}\to x_0$. מסגור וכבר $a\le x_0\le b$. מרציפות של f לפי

היינה יתקיים $+\infty \xleftarrow{j\to\infty} n_j\le f(x_{n_j})\xrightarrow{j\to\infty} f(x_0)\in\mathbb{R}$ וזו סתירה!

נראה שלא רק ש- $\sup_{[a,b]} f\in\mathbb{R}$, אלא גם מתקבל (הוא max ולא רק sup).

לכן $M=\sup_{[a,b]}f\in\mathbb{R}$. מהגדרת sup לכל n קיים x_n כך ש- $M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M$.

$a\le x_n\le b$ ולכן מ-BW יש לה ת"ס x_{n_j} מתכנסת. נסמן $x_{n_j}\xrightarrow{j\to\infty}x_0$. לכל j:

$$\begin{array}{ccccc} M-\frac{1}{n} & \le & f(x_{n_j}) & \le & M \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle j\to\infty,\ f\ \text{מרציפות}} & & \downarrow \\ M & \le & f(x_0) & \le & M \end{array}$$

וקיבלנו מסנדוויץ' $f(x_0)=M$ ■

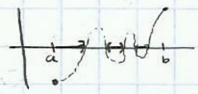
המשך חדו"א 3/7

<u>משפט ערך הביניים - MVT</u>: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ונניח ש- $f(a)<0$,
ו- $f(b)>0$ אזי קיים $a<c<b$ כך ש- $f(c)=0$. ← שורש של f.

⊛ **מסקנה**: (1) כנ"ל נכון אם $f(a)>0$, ו- $f(b)<0$

(2) אם $f(a)<17$, $f(b)>17$ אז קיים $a<c<b$, $f(c)=17$

(נגדיר כך: $g(x)=f(x)-17$ ונגיע ל- MVT ל- 0).

<u>הוכחת המשפט</u>:  $A=\{a\le x\le b: f(x)<0\}\subseteq[a,b)$

נסמן: $c=\sup A$, $c\in[a,b]$.

מתכונות sup קיימת סדרה $x_n\in A$ כך ש- $x_n\to c$. (בפרט $c\neq b$)

מתקיים: $0>f(x_n)\xrightarrow[f\text{ רציפה}]{n\to\infty} f(c)$ וגבול שומר על אי שוויון חלש לכן $f(c)\le 0$.

נניח בשלילה $f(c)<0$ מרציפות של f בנק' c קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(c-\delta,c+\delta)$
אז $f(x)\in(f(c)-\varepsilon,f(c)+\varepsilon)$, ונשתמש עבור $\varepsilon=\frac{|f(c)|}{2}$. כלומר לכל $x\in(c-\delta,c+\delta)$ אזי
$(\frac{3}{2}f(c)<)\ f(x)<\frac{f(c)}{2}<0$. בפרט $c+\frac{\delta}{2}\in A$ וזו סתירה לכך ש- $c=\sup A$.

$\Leftarrow$ $f(c)=0$ ■

⚠ הוכחה <u>נוספת</u>- השיטה של ניסיון למציאת פתרון- חיפוש בינארי + הלמה של קנטור.