

חידור 16

תכונות: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $f(x)$ שם

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ s.t. } \forall x \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

דבורות מניין, ונשמע
כאן כולו

הצבה: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ תהי $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר כי

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ אפשרי } \epsilon > 0 \text{ קיים כזו } R \text{ כן } x \in (R, \infty) \text{ מתקיים: } |f(x) - L| < \epsilon$$

הצבה: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ נאמר כי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ תהי $f: (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. נאמר כי

$$M > 0 \text{ קיים } \delta > 0 \text{ כן } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

נחיתותיות של גבולות

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרות בסביבה מנוקדת של x_0 .

אם קיימים הגבולות $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ אזי הגבולות הבאים קיימים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

מוסדות
עם הצורה
הצורה שהינה
איתותה
של סדרות

אם $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ויש סביבה
בה $g(x) \neq 0$

טענה: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ ← תרגיל! (מגדלת $\delta = \epsilon$, עבור $\epsilon > 0$ אפשרות $\delta = \epsilon$)

מסקנה: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ כאשר $P(x) = \sum_{n=1}^k a_n x^n$ פולינום

(נוסחה ישירה מהטענה הקודמת + איתותה של סדרות)

למשל, כ"ז נכון אם $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ כסקיט $Q \neq 0$

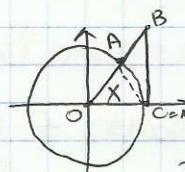
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad P, Q \text{ פולינומים}$$

טענה: $\sin x \leq x \leq \tan x$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$) (זהשתכנס $|\sin x| \leq |x|$)

$$S_{\Delta OAC} \leq OAC \leq S_{\Delta OBC}$$

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2} x \leq \frac{1}{2} \tan x$$

מתק"פ:



טעם הדיבור

מסקנה: $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-x_0}{2} \right| = |x-x_0|$$

נקה $\epsilon = \delta$ ונקה נשן צפי הצורה הצורה של קושי

GAME OVER!

בטעות (סגור וחסר הרחבה): $f: I \ni x \rightarrow J \ni f(x)$, $g: J \ni y \rightarrow \mathbb{R}$

ונניח כי קיימת L כזו: $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = L$$

הוכחה:

$f: I \ni x \rightarrow J \ni f(x)$

בנקודה x_0 - נגד הנקודה y_0 נקח $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$ (נתון) $f(x_n) \rightarrow y_0$

נניח כי $g(f(x_n)) \rightarrow L$

בנקודה y_0 - נגד הנקודה L (נניח)

דוגמה: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ (כאן $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ ונגד הנקודה $x_0 - \frac{\pi}{2}$)

($x \rightarrow \cos x$, $x \rightarrow x - \frac{\pi}{2}$)

משפט הסנדוויץ': $f, g, h: I \ni x \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $f \leq g \leq h$ ו- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$

אז $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$

הוכחה: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x) > 0 \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta(x) \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon$

נניח כי $\exists \delta_1 > 0 \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ (נניח)

$\exists \delta_2 > 0 \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon$ (נניח)

נניח כי $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ונקח: $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow L - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq L + \epsilon$

רשימות:

הצגה: תהי f מוגדרת בסביבת x_0 (לא מוגדרת). f הינה רציפה

ב- x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (כלומר: f מוגדרת וחסומה ב- x_0)

⚠️ כמעט כל מה שעשנו עד כה (כולל חסומות) חסר חשיבות, ואסורות ב- ∞

הערה:

(1) רציפות זה מושג נרחב (כשמוכרז "רציפות" מתכוונים בדרך כלל מוגדרת)

(2) f רציפה מניין ב- x_0 אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ו- f רציפה ב- x_0

(3) אם חסומה ב- x_0 אז $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

היא אי-רציפות סתם

דוגמה: $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ היא אי-רציפות סתם

חומר שינוי חד"ח 16

(4) אם הפונקציות הן $f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = x$ אז

נקודת אי-רציפות מסוג I

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

(5) אם $f(x) = \frac{1}{x}$ ו- $g(x) = x$ אז נקודת אי-רציפות מסוג II

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

(6) פונקציות $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ (החזקת-6) ו- $\cot x$ (החזקת-6) הן פונקציות רציפות.

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

טענה: D אינה רציפה כלל נק'.

הוכחה: ניקח $x_0 \in \mathbb{R}$ נקח 2 סדרות $q_n \rightarrow x_0$ ו- $r_n \rightarrow x_0$ כזו ש- $q_n \in \mathbb{Q}$ ו- $r_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$D(q_n) = 1 \rightarrow 1$$

$$D(r_n) = 0 \rightarrow 0$$

$$f(x) = x \cdot D(x)$$

טענה: f(x) רציפה ב- $x_0 = 0$.

הוכחה: 1. מוכיחים $f(0) = 0 \cdot D(0) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$-x \leq x \cdot D(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot D(x) = 0 \cdot D(0) = 0$$

2. נראה ש- $f(x) = x \cdot D(x)$ אינה רציפה ב- $x \neq 0$.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

3. נראה שהפונקציה $R(x)$ אינה רציפה ב- $x \neq 0$.

הוכחה: ניקח $x_0 \neq 0$ ונראה ש- $R(x)$ אינה רציפה ב- x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$$

הוכחה: ניקח $x_0 \in (0, 1)$ ונראה ש- $R(x)$ אינה רציפה ב- x_0 .

נניח $\epsilon = \frac{1}{2}$ ונראה ש- $\forall \delta > 0 \exists x \in (0, \delta)$ כזה ש- $R(x) > \frac{1}{2}$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (0, \delta) \Rightarrow |R(x) - 0| < \epsilon$$

המשקל (הכח):

$R(x)$ פונק' חיוקית וכן מכפיק זהו כ"ח $R(x) < \epsilon$.
יהי סדר.

מההנחה נובע ש- $0 \leq p \leq q$.

מה צ"א שיהא ϵ מתק"פ? $R(x) \geq \epsilon \iff \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\epsilon}$

מהנחת + ההנחה נובע שיש רק מס' סופי של p ו- $p-1$ עבור $R(\frac{p}{q}) \geq \epsilon$.

נבנו אותם $S_1, \dots, S_n$ ונחה $\delta = \min_i \left\{ \frac{|S_i - x_0|}{6} \right\}$.

סעיף: הסקיקת f של x מתק"פ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), R(x) < \epsilon$.

~~ה~~