חדו"א 15:

⊛ <u>תזכורת</u>: נאמר שפונק' f המוגדרת על קטע פתוח מנוקב $I\setminus\{x_0\}$

יש גבול בנק' x_0 ששווה ל-L (<u>בסימונים</u>: $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$)

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in I\setminus\{x_0\}$ המקיים $0<|x-x_0|<\delta$

מתקיים: $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>הגדרה שנייה</u>: $\lim f(x)=L$ אם לכל סדרה $a_n\in I\setminus\{x_0\}$ המקיימת

$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=L$.

<u>משפט</u>: ההגדרות הן שקולות!

<u>משפט יחידות הגבול</u>: תהי $f:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ פונק' המוגדרת על קטע פתוח מנוקב סביב x_0, ונניח ש-$\lim f(x)=L_1$, $\lim f(x)=L_2$ אזי $L_1=L_2$.

<u>הוכחה</u>: נובע מההגדרה ע"פ סדרות והמשפט המקביל לגבולות של סדרות:

נבחר $x_0\neq x_n\to x_0$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L_1$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L_2$

ולכן $L_1=L_2$ מיחידות הגבול של סדרות.

<u>דוגמאות</u>:

1) $\lim_{x\to4} 2x=8$. הפונק' מוגדרת. יהי $\varepsilon>0$

תנאי 1 על δ ⇐ $|f(x)-L|=|2x-8|=2|x-4|<2\cdot\delta \overset{\text{רוצים}}{\le}\varepsilon$

נבחר $\delta>0$ <u>שתלוי רק ב-ε</u> שמקיים את כל התנאים: $\delta\le\frac{\varepsilon}{2}$ למשל

ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ■

2) $\lim_{x\to2}x^2=4$

יהי $\varepsilon>0$. $|x^2-4|=|x-2||x+2|\overset{⊛}{\le}|x-2|\cdot5<\delta\cdot5\overset{\text{תנאי II}}{\le}\varepsilon$

⊛ $|x+2|=|x-2+4|\underset{\text{אי"ש המשולש}}{\le}|x-2|+4\underset{\text{תנאי I: }\delta\le1}{\le}5$

⇐ נבחר δ המקיימת את 2 התנאים, כלומר $\delta\le1$ ∧ $\delta\le\frac{\varepsilon}{5}$ ⇐ $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$

■

3) נוכיח $\lim_{x\to9}\sqrt{x}=3$. יהי $\varepsilon>0$.

$$|\sqrt{x}-3|=\frac{|\sqrt{x}-3||\sqrt{x}+3|}{\sqrt{x}+3}=\frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3}\underset{\sqrt{x}+3\ge3 \Leftarrow \sqrt{x}\ge0}{\le}\frac{1}{3}|x-9|<\frac{1}{3}\delta\overset{?}{\le}\varepsilon$$

אם נבחר $\delta\le3\varepsilon$ יתקיים הדרוש. ($\delta=3\varepsilon$)

■

④ $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{5}{3}$

נשים לב ש- $\frac{2x^2+x-3}{(x+2)(x-1)}$ מוגדרת בקטע המנוקב $(0,2)\setminus\{1\}$.

יהי $\varepsilon>0$.

$$\left|\frac{2x^2+x-3}{(x+2)(x-1)}-\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{(2x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}-\frac{5}{3}\right| \overset{x\neq 1}{=} \left|\frac{6x+9-5x-10}{3(x+2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{x-1}{3(x+2)}\right| = \frac{|x-1|}{3x+6} \underset{0<x<2 \text{ כי}}{\leq} \frac{|x-1|}{6} < \frac{1}{6}\delta \leq \varepsilon$$

כי $x>0$ לכן המונה חיובי

$3x>0$
$3x+2>2$

כלומר עבור $\varepsilon = \delta$ זה עובד. ∎

⑤ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \neq L$ לכל $L\in\mathbb{R}$

יהי L. נב' שקיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים $0<|x|<\delta$ כך ש- $|1/x-L|\geq\varepsilon$. נבחר $\varepsilon=1$. יהי $\delta>0$. נבחר $0<x\leq\frac{1}{|L|+1}$ וגם $0<x<\delta$ למשל $x=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{|L|+1}\}$ אז:

$$\left|\frac{1}{x}-L\right| \geq \left|\frac{1}{x}\right|-|L| = \frac{1}{x}-|L| \underset{x\leq\frac{1}{|L|+1}}{\geq} |L|+1-|L| = 1 = \varepsilon$$ ∎

⑥ $f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ הוכיחו כי $\lim_{x\to 0} f(x)$ לא קיים.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה ש- $\lim_{x\to 0} f(x)=L$. אזי לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

בפרט, עבור $\varepsilon=\frac{1}{5}$ קיים $\delta>0$ מתאים:

$$2 = |\underset{-1}{f(-\tfrac{\delta}{2})} - \underset{1}{f(\tfrac{\delta}{2})}| = |f(-\tfrac{\delta}{2})-L+L-f(\tfrac{\delta}{2})| \underset{\text{אי שמ"ש}}{\leq} |f(-\tfrac{\delta}{2})-L|+|L-f(\tfrac{\delta}{2})| < \varepsilon+\varepsilon = \frac{2}{5} < 2$$

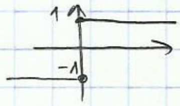
סתירה.

גבולות חד צדדיים[3]

<u>הגדרה:</u> תהי $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$ פונק' המוגדרת על קטע פתוח. נאמר ש- $L\in\mathbb{R}$ הוא הגבול מימין של $f(x)$ בנק' x_0, ומסמנים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(x_0,b)$ המקיים $0<x-x_0<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>הגדרה לפי סדרות:</u> $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{x_n\}\subseteq(x_0,b)$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

⚠ <u>תרגיל:</u> לבדוק שההגדרות שקולות.

<u>בדוגמא הקודמת:</u> $f(x) =$  הרי נכונות ש- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$

<u>טענה:</u> תהי $f: I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$, $x_0\in I=(a,b)$. אזי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$

אם ורק אם $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ – הגבולות החד צדדיים קיימים.

<u>הוכחה:</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש- $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$. אזי לכל ε קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$

מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. בפרט, לכל $0<x-x_0<\delta$ זה נכון $\Leftarrow$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$

ולכל $0<x_0-x<\delta$ זה נכון $\Leftarrow$ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שהגבולות החד"צ קיימים ושווים, אזי לכל ε יש $\delta_1, \delta_2>0$ כך

שלכל $0<x-x_0<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$ } אם נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

ולכל $0<x_0-x<\delta_2$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$ } (נקח) שוב לכל $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים

$|f(x)-L|<\varepsilon$ ∎

<u>דוגמא:</u> פונקציית דיריכלה מוגדרת באופן הבא: $D(x): \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}}$$

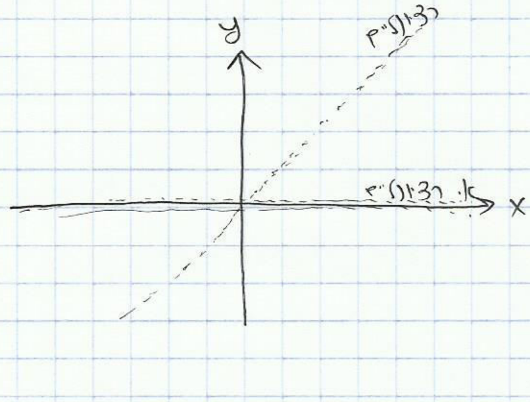
ל- $D(x)$ אין גבול ב- x_0 לכל x_0.

<u>הוכחה:</u> יהי x_0. נבחר סדרה של רציונליים $x_n\neq x_0$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

אם יש גבול L אז מהגדרה $L=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=1$

נבחר סדרה y_n של אי רציונליים כך ש $\lim_{n\to\infty} y_n=x_0$ אבל $L=\lim_{n\to\infty} f(y_n)=0$

וזו סתירה ל- יחידות הגבול!



(2) האם ל- $x\cdot D(x)$ יש גבולות?