חדו"א 13

<u>תזכורת</u>: טור חזקות סביב $x_0=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

טור חזקות סביב $x_0\in\mathbb{R}$ נק' כלשהי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{(x-x_0)}_{y}^n$

⊛ <u>תרגיל</u>: בהינתן x נמצא את הקשר בין המקדמים.

⚠ <u>שאלה</u>: עבור אילו x-ים הטור מתכנס/מתכנס בהחלט.

<u>תשובה</u>: "קטע <u>סימטרי</u> סביב x_0: $(-\alpha,\alpha)$ $[-\alpha,\alpha)$ $[-\alpha,\alpha]$ $(-\alpha,\alpha]$"

<u>טענה</u>: בהינתן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ונניח שהטור מתכנס עבור $x\in\mathbb{R}$ (נסמן $r=|x_0|$)

אזי הטור מתכנס בהחלט בקטע $(-r,r)$.

⚠ בקצוות $r,-r$ יש להציב ולבדוק באופן קונקרטי התכנסות.

<u>הוכחה</u>: מהנתון הטור $\sum a_n x_0^n$ מתכנס ולכן האיבר הכללי שלו $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

ובפרט, חסום. נסמן ב- M: $\forall n\in\mathbb{N}: |a_n x_0^n|\le M$.

נבחר $x_0\in(-r,r)$, מתקיים: $|x|=r'<r=|x_0|$. נסמן $0<q=\frac{r'}{r}<1$.

נשים לב שמתקיים: $|a_k x^k| = |a_k x_0^k \left(\frac{x}{x_0}\right)^k| =$

$$= |a_k x_0^k|\cdot q^k \le \underbrace{Mq^k}_{\text{מתכנס - זהו טור גיאומטרי}}$$

ולכן ממבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\Leftarrow$ $\sum |a_k x^k|$ מתכנס

$\Leftrightarrow$ $\sum a_k x^k$ מתכנס בהחלט ■

<u>הגדרה</u>: **רדיוס ההתכנסות** של טור חזקות $= r$ המקסימלי כך שיש

התכנסות (בהחלט) ב- $(-r,r)$.

<u>טענה (קושי-הדמרד)</u>: רדיוס ההתכנסות של $\sum a_k x^k$ נתון ע"י:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}}$$

⚠ <u>בטענה זו נגדיר נ"ח</u>: $\frac{1}{0}=\infty$; $\frac{1}{\infty}=0$

<u>הוכחה</u>: נסמן $\bar{R}=\frac{1}{\limsup|a_k|^{1/k}}$ ונראה התכנסות בהחלט ב- $(-\bar{R},\bar{R})$

• <u>נניח: $|x|<\bar{R}$</u>: קיים $0<q<1$ כך ש- $|x|<q\bar{R}$, ולכן: $|x|<q\cdot\frac{1}{\limsup|a_k|^{1/k}}$

$\Updownarrow$

$\limsup|a_k|^{1/k} < \frac{q}{|x|} \Longrightarrow$

לפי תכונות של limsup קיים $k\in\mathbb{N}$ כך

שלכל $k\ge k_0$ מתקיים $|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{q}{|x|}$. כלומר $\forall k\ge k_0$ יתקיים:

$$|a_k x^k| = \left(|a_k|^{\frac{1}{k}}|x|\right)^k \le q^k$$

כעת ממבחן ההשוואה לטורים חיוביים לטור גיאומטרי נקבל התכנסות בהחלט ב-x כנדרש!

המשך ההוכחה:

• נניח ש- $|x|>\bar{R}$ ונראה שהטור מתבדר.

נבחר מספר $Q>1$ כך ש- $|x|>Q\bar{R}$

כמו קודם נקבל: $\limsup |a_k|^{1/k} > \frac{Q}{|x|}$

מתכונות של limsup קיימת ת"ס כך ש- $|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \geq \frac{Q}{|x|}$

כמו קודם $Q^{n_k} \leq (|a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}|x|)^{n_k} = |a_{n_k}x^{n_k}|$ ⇐ ולכן ממשפט 'הסנדביץ' המוכלל',

$\infty \xleftarrow{k\to\infty}$ (כי $Q>1$) (האיבר הכללי של הטור $\sum|a_kx^k|$ לא

שואף ל-0 (זה יהיה נכון בירושה)

⇓

הטור לא מתכנס! ∎

דוגמאות: ⊛ א) $\sum \frac{x^k}{k!}$ מתקיים: $R=+\infty$ $\left(\frac{1}{\sqrt[k]{k!}} \to 0\right)$

ב) $\sum k!x^k$ $R=0$

ג) $\sum \frac{x^k}{k}$ ידוע ממה שהוכחנו:
$(-1,1)$ מתכנס בהחלט
$[-1,1)$ מתכנס
טור הרמוני מתחלף, טור הרמוני

פונקציות

הגדרה: פונקציה $f:A\to B$ זו התאמה חד ערכית מ-A ל-B

(איור:)

הגדרה: f נקראת **חד חד ערכית** אם עבור $x_1\neq x_2$ מתקיים $f(x_1)\neq f(x_2)$ (איור:)

הגדרה: $f:A\to B$ נקראת **על** B אם לכל $y\in B$ קיים $x\in A$ כך ש- $f(x)=y$ (איור:)

מה אפשר לעשות עם פונקציות?

⊛ $f\pm g$ ⊛ $f\cdot g$ ⊛ f/g ← תחומי ההגדרה יהיו חיתוך תחומי ההגדרה של f,g (המחנה לא יהיה 0)

⊛ פעולת ההרכבה: בהינתן $g:B\to C$, $f:A\to B$

$(g\circ f):A\to C$ מוגדרת ע"י $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

מהו תחום ההגדרה של ההרכבה? כל ה-x-ים שבתחום ההגדרה של f כך ש- $f(x)$ בתחום ההגדרה של g.

הגדרה: בהינתן $f:A\to B$ נאמר ש- f **הפיכה** אם קיימת $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=I_A$ $f\circ g=I_B$

המשך חדו"א 13:

תרגיל: פונקציה הפיכה היא בהכרח חח"ע ועל. (וההפך)

(נגדיר $g=f^{-1}$ ....)

מתקיים: יש פונקציה **יחידה** שהיא ההופכית שלה (g כנ"ל היא יחידה).

נסמן אותה $f^{-1}=g:B\to A$

הערה: בהינתן $\underbrace{f:A\to B}_{\text{לא בהכרח חח"ע ועל}}$ ו- $C\subseteq B$ ניתן להגדיר $\overbrace{f^{-1}(C)=\{x\in A \mid f(x)\in C\}}^{\text{תמונה הפוכה של קבוצה}}$

הגדרה: $f:A\to B$ **עולה** אם עבור $x_1\leq x_2$ מתקיים $f(x_1)\leq f(x_2)$

(כנ"ל עבור עולה ממש, יורדת, יורדת ממש)

הגדרה: $f:A\to B$ **חסומה מלעיל** אם $\exists M\in\mathbb{R},\ \forall x\in A\ f(x)\leq M$

(כנ"ל חסומה מלרע, חסומה....)

טענה: אם $f:A\to B$ הפיכה ועולה אזי $f^{-1}:B\to A$ (הפיכה) ועולה.

הוכחה - תרגיל!

* **מטרה:** להגדיר את פונקציית החזקה $f(x)=x^{\alpha}$ כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad f:\underline{?}\to\underline{?}$

ידוע: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$

* $n\in\mathbb{N}$: $f(x)=x^n$ מונוטונית עולה (תרגיל)
* $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x^n}$
* "הוכחנו" שלכל מספר חיובי יש שורש (לא כדר) $\Leftarrow$ ניתן להגדיר $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$

הגדרה: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x^{\frac{m}{n}}:=(x^{\frac{1}{n}})^m$

⚠ **תרגיל:** מדוע זה לא תלוי בבחירה? כלומר נניח $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ - מוכיח $x^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{m'}{n'}}$

(התחלה: $mn'=m'n \Leftarrow x^{mn'}=\cancel{x}^{m'n} /()^{\frac{1}{nn'}} \Longleftrightarrow x^{\frac{m}{n}}=x^{\frac{mn'}{nn'}}=x^{\frac{m'n}{nn'}}=x^{\frac{m'}{n'}}$)

רעיון: $x^{\pi}:=\ ?$ - נבחר $\mathbb{Q}\ni q_n\xrightarrow{n\to\infty}\pi$ (קיימת כי הרציונליים צפופים בממשיים)

ונגדיר $x^{\pi}:=\lim_{n\to\infty}x^{q_n}$.

$\Leftarrow$ צ"ל: 1. מדוע הגבול הזה קיים?
2. מדוע לא תלוי בבחירה של q_n