

חדור שיטות 12

תכונות: יהי (a_n) סדרה ויהי (b_n) סדרה נוספת של איברים

$$A_1 = a_1 + \dots + a_{n_1} \quad A_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2} \quad \dots \quad A_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$$

נסמן $T_k = \sum_{n=1}^k a_n$ ונשים לב שסדרה החדשה $\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum A_n$ מתכנס.

למה (*): אם (a_n) סדרה ויהי (b_n) סדרה נוספת של איברים

$$A_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k} \quad \sum A_k \text{ מתכנס} \Leftrightarrow \sum a_n \text{ מתכנס}$$

משפט ביטול: יהי $\sum a_n$ סדרה שמתכנסת ל- $\alpha \in \mathbb{R}$

(1) אם $\sum a_n$ מתכנס בהתאם אזי כל סדרה חדשה של מתכנסת ל- α .

(2) אם $\sum a_n$ מתכנס בהתאם אזי כל סדרה חדשה של מתכנסת ל- α .

בן שהסדרה החדשה מתכנסת ל- α (או לא) יתכן כפי שצוית תוצאה).

* "סדרה חדשה" של סדרה $\sum a_n$ זה סדרה $\sum b_n$ כש- $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפונקציה חדשה

הוכחה:

חלק (1) שם א': נניח ש- $\sum a_n$ מתכנסת ל- α (מתכנסת בהתאם $\Leftrightarrow$ מתכנסת)

נראה שכל סדרה חדשה של $\sum a_n$ מתכנסת ל- α .

נראה שסדרה הסכומים החדשים של $\sum a_n$ קטנה או שווה לזאת של

של סדרה הסכומים החדשים של $\sum a_n$ (להוכיח) $\sum a_n$ מתכנסת ל- α תהיה מתכנסת

ובכוחה זקן זה נעזר יספיק לסיים את ההוכחה.

נסמן: $t_n = \sum_{r=1}^n b_r$, $S_n = \sum_{r=1}^n a_r$ שהפונקציה חדשה מתכנסת.

עבור $n \in \mathbb{N}$ נבחר: $M_n = \max_{1 \leq r \leq n} |a_r|$ כאשר $n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפונקציה חדשה

מתקיים: $t_n \leq S_{M_n} \leq A$ (הוכחה) $\sum a_n$ מתכנסת ל- A קטנה מתנאי.

$t_n \leq A$ מונוטונית עולה וכלת $\sum b_n$ מתכנסת ל- A .

לשקול סדרה $\sum a_n$, $A \leq B$, כי פשוט מפיצים את אותו הטעם כאשר

הפונקציה החדשה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפונקציה החדשה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ הפונקציה החדשה

$u_n - v_n = a_n$ יתכן: $u_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$, $v_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$ נבחר: $\sum a_n$ מתכנסת ל- A

$x_n - y_n = b_n$ $y_n = \frac{1}{2}(|b_n| - b_n)$, $x_n = \frac{1}{2}(|b_n| + b_n)$

הסדרה u_n, v_n מתכנסות (עקב ההשערה: $u_n \leq |a_n|$)

נפגשו התוצאה הקודמת עבור $(y_n, v_n) + (x_n, u_n)$ מתכנסות (עקב: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$)

למה (*) נ"ח $\sum_{j=1}^{n_k} a_j$ סגור (הימין, ימין) $\sum_{k=1}^L A_k$ מתכנס

ע"פ $\sum a_n$ מתכנס.

הסבר: נ"ח $S_j = \sum_{k=1}^j a_k$ נ"ח $n_{k+1} \leq j \leq n_{k+1}$

$$\begin{aligned} \min_{T_k, T_{k+1}} \{S_j\} &\leq \max_{T_k, T_{k+1}} \{S_j\} \\ \uparrow & \quad \uparrow \\ \text{כפוף} & \quad \text{כפוף} \end{aligned}$$

רצפים את ההוכחה - תכל'ה: $a_n \rightarrow L$ אזי $\min\{a_n, a_{n+1}\} \rightarrow L$

הוכחת חוק (2) של רימאן

נ"ח a_n מתכנס בתנאי (נ"ח מה"כ סדר).

(נ"ח a_n) $S > 0$ ונראה שיש סיפור מחדש של הסדר $\sum a_n$ כך

ע"פ $\sum b_n = S$ (= הסיפור מחדש).

ש"כ: $a_n = p_n - q_n$ ו- $q_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n)$, $p_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$

נשים לב ש- p_n, q_n מתכנסים (כי a_n מתכנס) $\sum p_n$ ו- $\sum q_n$ מתכנסים

וז' $p_n - q_n$ מתכנס (מההוכחה) $\sum p_n \leftarrow \sum q_n$ מתכנס $\sum |a_n|$ מתכנס (סדרה!)

העקף, $p_n, q_n \rightarrow 0$ (כי $a_n \rightarrow 0$) $\sum p_n, \sum q_n \rightarrow 0$ (תכל'ה)

$\sum p_n$

$\sum q_n$

$\sum a_n$

$$\begin{aligned} b_1 &= p_1 + \dots + p_{n-1} \\ A_1 &= p_1 + \dots + p_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &< p_1 + \dots + p_{n-1} \\ (S > p_1 + \dots + p_{n-1}) \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ (המקום הראשון שקורה - קו"ז כי $p_n \geq 0$)

$$\begin{aligned} b_2 &= -(q_1 + \dots + q_m) \\ A_2 &= A_1 - (q_1 + \dots + q_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 - (q_1 + \dots + q_m) &\leq S \\ (A_1 - (q_1 + \dots + q_m) > S) \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$ (המקום הראשון שקורה - קו"ז כי $q_n \leq 0$)

$$A_2 + q_m \geq S \geq A_2$$

נשים לב: $\heartsuit$

$$\begin{aligned} b_3 &= p_{n+1} + \dots + p_{n_2} \\ A_3 &= A_2 + (p_{n+1} + \dots + p_{n_2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &< A_2 + (p_{n+1} + \dots + p_{n_2}) \\ (S > A_2 + (p_{n+1} + \dots + p_{n_2})) \end{aligned}$$

$n_1 \leq n_2 \in \mathbb{N}$ (המקום הראשון שבו S שווה ערך ל- A)

$$A_3 - p_{n_2} \leq S \leq A_3$$

נשים לב: $\heartsuit$

$\vdots$

$$\leftarrow A_{2k} \leq S \leq A_{2k} + q_{m_k} \quad \text{סאינצורציה (קו"ז):}$$

$$A_{2k+1} - p_{n_{k+1}} \leq S \leq A_{2k+1}$$

מכיוון ש- $p_n, q_n \rightarrow 0$ כן נראה ש- $\sum a_n$ מתכנס

$$\begin{aligned} S \pm p_{n_k} &\leq A_k \leq S \pm q_{m_k} \\ \downarrow & \quad \downarrow \text{כפוף} \quad \downarrow \\ S & \quad \quad \quad S \end{aligned}$$

קו"ז:

תכל'ה: להוכיח שיתן
לכנס: $-\infty, \infty$
וקבלו! $\heartsuit$

המשך חז"ל ב:

$$(X_0 \rightarrow \sum a_n X_0^n)$$

(סומרי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$$

טורי חדקות:

⚠ סקת נ"תן זרשק: $\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n (X-\alpha)^n \right]$ וישקט בן a_n ו- b_n α -

סמנ: נתקון ב- $\sum a_n X^n$. אל הטור לתכנס בנק' X_0 קש- $|X_0| = r$

אזי הטור לתכנס ברחט ב- $(-r, r)$.

⚠ בקור אל $\sum b_n (\overset{\text{סימני סג}}{X-\alpha})^n$ נקט שחטור מתכנס ברחט ב- $(\alpha-r, \alpha+r)$