19/11/13

חדו"א 11

טורים 8

מבחן המנה: נניח ש- $a_n>0$ לכל n, אזי:

(1) אם קיים $0<q<1$ כך ש- $\forall n: \frac{a_{n+1}}{a_n}\le q$ ⇐ אזי $\sum_0^\infty a_n$ מתכנס

(2) אם מתקיים שהח"מ $a_{n+1}\ge a_n$ אזי ⇐ $\sum_{n=1}^\infty a_n=\infty$

הוכחה:

1) מהנתונים: $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\le a_1q^{n-1}$

וידוע ש- $\sum_{n=1}^\infty a_n \le \sum_{n=1}^\infty a_1q^{n-1}=a_1\cdot\frac{1}{1-q}$ ⇐ לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים גם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

2) נתון: a_n עולה, $\overset{\text{מה"כ}}{\forall}$ $a_1>0$ ובפרט $a_n\not\to 0$, אבל אם הטור מתכנס הוכחנו שהאיבר הכללי שואף ל-0, לכן $\sum a_n$ לא מתכנס! ▨

מסקנה+מבחן המנה הגבולי: בהנחה ש- $\forall n\in\mathbb{N}: a_n>0$ מתקיים:

(1) אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ⇐ $\sum_{n=1}^\infty a_n<\infty$

(2) אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ ⇐ $\sum_{n=1}^\infty a_n=\infty$

דוגמא: $\sum_{k=1}^\infty\frac{k^{k/2}}{k!}$: $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^{k/2}}=\frac{(k+1)^{1/2}}{k+1}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k/2}\le\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{k+1}}\xrightarrow{k\to\infty}0$

ממבחן המנה הגבולי $\sum_{k=1}^\infty\frac{k^{k/2}}{k!}<\infty$ מתכנס.

מבחן העיבוי: תהי $0\le a_n$, ונניח a_n מונוטונית יורדת ($\forall n.\ a_{n+1}\le a_n$)

אזי הטור $\sum a_n$ מתכנס ⇔ הטור $\sum_{k=1}^\infty 2^k\cdot a_{2^k}$ מתכנס

הוכחה: (רעיון: $a_1+\underbrace{a_2+a_3}_{a_2+a_2}+\underbrace{a_4+a_5+a_6+a_7}_{a_4+a_4+a_4+a_4}+a_8+\ldots\le a_1+2a_2+4a_4+\ldots=a_1+\sum_{k=1}^\infty 2^k\cdot a_{2^k}$

מצד שני: $a_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty 2^k a_{2^k}=a_1+a_2+\overbrace{a_4+a_4}^{\times 2}+\overbrace{a_8+a_8+\ldots}^{\times 4}\le\sum a_n$)

פורמלית: משום שמדובר בטורים חיוביים התכנסות שקולה לחסימות הסכומים החלקיים.

נסמן: $S_n=\sum_{j=1}^n a_j$, $T_n=\sum_{j=1}^n 2^j a_{2^j}$.

⇐ נניח ש- T_n חסומה: $\forall n.\ T_n\le M$. מתקיים: $S_n=\sum_{j=1}^n a_n\overset{\text{עבור k מספיק}}{\le}\sum_{j=1}^{2^k-1}a_j\le\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}a_{2^{i-1}}=a_1+\sum_{i=1}^{k-1}2^i a_{2^i}\le a_1+M$

⇐ S_n גם חסומה

⇒ נניח ש- S_n חסומה: $\forall n.\ S_n\le M$. מתקיים: $T_n=\sum_{j=1}^n 2^j a_{2^j}\le 2\sum_{i=1}^{2^n} a_i\le 2M$

⇐ T_n גם חסומה. ▨

דוגמא: ⊛ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}}$ (יודעים: $p=1$ מתבדר, $p=2$ מתכנס $\xrightarrow{\text{מבחן ההשוואה}}$ $0\le p\le 1$ מתבדר, $2\le p$ מתכנס)

לפי מבחן העיבוי, זה מתכנס אמ"מ $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-p)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k}_{\text{טור גאומטרי}} < \infty \iff 2^{1-p} < 1 \iff p>1$$

ואם $2^{1-p} \ge 1$ מתבדר $\Leftrightarrow p\le 1$

$\Downarrow$

$p\in(0,1]$ מתבדר. $p\in(1,\infty)$ מתכנס.

⊛ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n}}$ מתכנס $\iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ מתבדר!

התכנסות בתנאי: (= טור מתכנס, אך בערך מוחלט לא מתכנס)

<u>משפט לייבניץ</u>: תהי a_n סדרה אי שלילית, מונוטונית יורדת ל-0, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנס

(<u>לדוגמא</u>: הטור ההרמוני האלטרנטיבי: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ מתכנס)

<u>הוכחה</u>: נשתמש בקריטריון קושי להתכנסות טורים.

מכך ש- $a_n \to 0$ קיים N_0 כך שלכל $n>N_0$: $a_n<\varepsilon$.

יהיו $m>n>N_0$ ונביט ב- $\left|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k\right|$:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k\right| = a_n \overbrace{- a_{n+1} + a_{n+2}}^{\text{שלילי}} \overbrace{- a_{n+3} + \ldots}^{\text{שלילי}} \overbrace{\pm a_m}^{\text{אולי זה גם אוקבע}} \le a_n \underset{n>N_0}{<} \varepsilon$$

הסדרה יורדת לכן תמיד $0<a_n-a_{n+1}$
ואם יש מס' אי-זוגי של איברים הסימן האחרון הוא + ולכן להם סכום של חיוביים

$\Leftarrow$ מתקיים קריטריון קושי! $\Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n < \infty$

∎

הכללה של לייבניץ:

<u>משפט - קריטריון דיריכלה</u>: נניח ש- $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n$ חסומה ויהי b_n סדרה שמונוטונית יורדת ל-0. אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

נראה מתרגול

<u>משפט - קריטריון אבל</u>: נניח ש- a_k ו- b_k סדרות כך ש- $\sum b_k$ מתכנס, והסדרה a_n מונוטונית וחסומה. אזי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

<u>המרכיב העיקרי בהוכחת דיריכלה</u>

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m} (S_k - S_{k-1})\cdot b_k\right| = \left|S_n b_n - S_{n-1} b_n + S_{n+1} b_{n+1} - S_n b_{n+1} + S_{n+2} b_{n+2} - S_{n+1} b_{n+2} \ldots + (S_m - S_{m-1}) b_m\right|$$

$$= \left|-S_{n-1} b_n + S_n (b_n - b_{n+1}) + S_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + \ldots + S_{m-1}(b_{m-1} - b_m) + S_m b_m\right| \le$$

$$\le |S_{n-1}| b_n + \sum_{k=n}^{m-1} |S_k| (b_k - b_{k+1}) + |S_m| b_m \le M\left[b_n + \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + b_m\right] \le M \cdot 2 b_n$$

חסם עליון!

המשך חדו"א שיעור 11:

ממשפט לייבניץ: $S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots < \infty$

$$2S = \frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+\frac{2}{7}-\frac{2}{8}+\frac{2}{9}-\dots = \frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}_{+1/3}+\underbrace{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}}_{+\frac{1}{3}}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\dots$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots = S$$

סתירה!

מופיע

$-\frac{1}{2k}$ פעם אחת

$\frac{1}{2k+1}$ פעם אחת

↲ זהו שינוי סדר הסכימה וזה אסור!!

משפט רימן על שינוי סדר הסכימה (שיעור הבא)

רק אם טור מתכנס בהחלט ניתן לשנות את סדר הסכימה!

אם טור מתכנס בתנאי בלבד ניתן לשנות את סדר הסכימה

כך שיתכנס לכל מספר שנרצה!!

(המשך להוכחה.

הוספת סוגריים לטור:

למה: תהי (a_n) ונניח $\sum a_n$ מתכנס. תהי סדרה עולה ממש של טבעיים $n_1<n_2<n_3<\dots$, ונסמן $A_k = a_{n_{k-1}+1}+\dots+a_{n_k}$. אזי $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ מתכנס.

הוכחה:

$S_n=\sum_{j=1}^{n} a_j$, $T_N=\sum_{k=1}^{N} A_k$ ונשים ♡ ש- $T_N=\sum_{j=1}^{n_N} a_j = S_{n_N}$ ת"ס של S_n.

ובפרט מתכנס לאותו סכום.

⚠ הערה: לא תמיד אפשר להוריד סוגריים ולשמור על ההתכנסות!

(רצ"ל הלמה ההפוכה אינה ($\Leftarrow$). ← לדוג' $\sum(-1)^n$ לא מתכנס $\not\Leftarrow$ $\overset{0}{(-1+1)}+\overset{0}{(-1+1)}+\dots$ כן מתכנס.

למה: תהי a_n סדרה, n_k סדרה עולה ממש של טבעיים.

ונניח עבור $n_{k-1}+1\le j\le n_k$ כל a_j בעלי אותו סימן. נסמן $A_k=\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j$,

ונניח ש- $\sum A_k$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס לאותו מספר.

⚠ הערה: $b_n\to l$ אזי $\max(b_n,b_{n+1})\to l$ וגם $\min(b_n,b_{n+1})\to l$

בהוכחה: לכל $n_j\le n<n_{j+1}$: $\min(T_j,T_{j+1})\le S_n\le \max(T_j,T_{j+1})$