

חדול שינוי 10

טורים

תהי (a_n) סדרה (ציר סדרה) חסמה שנקטות סדרת הסכומים S_n חסומים

של (a_n) . נכתוב $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$

נעזר: נאמר שהטור $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ מתכנס אם הסדרה של הסכומים

החזקה $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ מתכנסת. ונכתוב: $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

דוגמאות: * הסדרה S_n שגור לאינפיניטום סדרה קריטריון קושי מתכנס.

* $\forall n, a_n = 1 \leftarrow$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס! כי $S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n \cdot 1 = n \rightarrow \infty$

* $a_n = q^n, 0 < q < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2)^n = 1 \iff S_n = \sum_{k=1}^n (1/2)^k = \frac{1/2 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 1 - (1/2)^{n+1} \rightarrow 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \left(\frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \right) \rightarrow \frac{q}{1 - q} \rightarrow \text{טור גאומטרי}$$

* הטור ההרמוני: $a_n = \frac{1}{n}, S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית עולה

הטור ההרמוני לא מתכנס! (כי מתקיים $S_{2^k-1} \geq \frac{k}{2} \rightarrow \infty$) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

טענה: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $a_n \rightarrow 0$

הוכחה: אם הטור מתכנס, נניח S_n סכומים החזקה $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ יש סדרה

הזו סדרה נכונה: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ מכאן שסדרה: $S_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \rightarrow L$

מחשבוני $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = L - L = 0$

$$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$$

קריטריון קושי להתכנסות טורים

תהי סדרה a_n . נבנה בעזרתה טור $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

הטור מתכנס אם ורק אם $\forall \epsilon > 0$ קיים N כך שלכל $m, n > N$: $|\sum_{j=n+1}^m a_j| < \epsilon$

$$[S_m - S_n < \epsilon \quad S_n \text{ מקיימת קריטריון קושי}]$$

הוכחה: נניח ישירות מההצגות + קריטריון קושי להתכנסות סדרות.

!!/הערה: נסתמים חשמים זה $N_0 < N$ וזה N_1 : $|\sum_{j=n+1}^{n+p} a_j| < \epsilon$

טענה: שינוי של מס ספי מאפרי הטור לא משפיע על התכנסותו!

השקול - תהי (a_n) סדרה ויהי m סדרה ק-ש $b_n = a_n$ כמעט תמיד

אזי הטור $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ מתכנס $\Leftrightarrow$ הטור $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ מתכנס.

הוכחה: תארים שקריטריון קושי מתקיים לטור $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ אל"ם הוא

מתקיים לטור $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ כי משתתפים נס רק איברים על אינדקס $< N$.

פעולות פשוטות על טורים:

"משבון זכרון לטורים"

סבב $\rightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} (a_j + b_j)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty} a_j + \sum_{j=1}^{\infty} b_j$

זה נוסע ישירות מחשבון זכרון לסדרות הסכמים והחזק"ס.

כפ כק $\rightarrow$ $\sum_{n=p}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כצומה:

⚠ כזה אין לנו משפט על חשבון על ~~זה~~ כפ טורים או על $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$!!

חתכוסות בהחצט

הצורה: נאמר שהטור $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ מתכנס בהחצט אז הטור

$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ מתכנס.

טענה: אם טור $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ מתכנס בהחצט $\Leftrightarrow$ הטור מתכנס.

הוכחה: נראה ש $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ מת"ס את קריטריון קושי.

3: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall m > n \geq N: \left| \sum_{j=n+1}^m a_j \right| < \varepsilon$

משום ש $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| > \infty$ הוא מקיים את קריטריון קושי.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

⚠ ישנם טורים שמתכנסים אך לא בהחצט!! נמש. מתכנס בהחצט.

טורים חיוביים ו $a_n \geq 0$

אם (a_n) אי-שלילית $\Leftrightarrow$ הסדרה $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ היא סדרה עולה.

לכן היא מתכנסת (ל- $\sup$ שלה) או שואפת ל- $+\infty$.

המשפט השני: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

טענה: יהי $a_n \geq 0$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ סדרת הסכומים החלקיים S_n

חסומה משייט.

(מ"ב כי היא מונוטונית עולה)

משפט ההשוואה וארץ חזק"ס:

יהי $a_n \geq 0$ ו- $b_n \geq 0$, ונניח שיש $N_0 < \infty$ כזה, אז:

(1) אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

ולכן (2) אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ לא מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס.

הוכחה:

נניח בה"כ $a_n \geq b_n$ (מותר לטענה קודמת לשים $a_n = b_n$ כמעט תמיד).

ואז $S_n^{(b)} \leq S_n^{(a)}$ $\forall n$. ולכן אם $S_n^{(a)}$ חסומה משייט אז גם

$S_n^{(b)}$ חסומה משייט $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.

$$\frac{n+2}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \leftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1} < \infty \quad ?$$

$$\downarrow$$

$$+\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+1} \rightarrow +\infty$$

$$\forall n \geq 2: \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \leftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad ?$$

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} \right) - \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ חסומה משייט $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{N} \rightarrow 1$ ופי משפט ההשוואה

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \right)$$

סימון: אם a_n ו- b_n מקיימים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שכל $n > N_0$: $b_n \leq a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \not\leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{אם } N_0 \text{ קטן}$$

טענה (משפט השני): יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם קיים $0 < q < 1$ כך

שיש n מתקיים $(a_n)^{\frac{1}{n}} < q$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (או תנאי).

הוכחה: נניח $a_n \leq q^n$ (מתקיים: $0 < q < 1$). מתקיים: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} < \infty$ מתכנס.

לכן ממשיט ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

משפט השני (השני): אם $0 \leq a_n$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} = q < 1$ אז $\sum a_n < \infty$.

הוכחה: נניח $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} = q < 1$. נבחר $\epsilon > 0$ כך שיש $N_0 < \infty$ כזה שכל $n > N_0$: $a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{\frac{1}{n}} + \epsilon$

נניח $\epsilon > 0$ ו- $q + \epsilon = q' < 1$. נקבל $N_0 < \infty$ כזה שכל $n > N_0$: $a_n < q'^n$ ומהמשפט