

17.12.15

פונקציות

הכנה:

יהי $a \in \mathbb{R}$ ונקי f מוגדרת בסביבה מעוקבת

$a \in (\alpha, \beta) \setminus \{a\}$, $\alpha < a < \beta$

נסמן: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ עבור $l \in \mathbb{R}$ אם:

• לפי קש - $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ כך אם

$$0 < |x - a| < \delta \text{ אז } |f(x) - l| < \epsilon$$

• לפי הינה - אם $a \neq x_n$ מתקיים

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

על: ההבחנה בין קש ולי הינה קטנה.

* נסמן $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ אם:

• קש: $0 < x - a < \delta$ (בתקום) $a < x < a + \delta$

• הינה: $a < x_n \rightarrow a$

* נסמן $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ אם:

• קש: $a - \delta < x < a$

• הינה: $a > x_n \rightarrow a$

* נסמן $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ אם:

• קש: $\forall \epsilon > 0 \exists M$ כך של $x > M$ אז

$$|f(x) - l| < \epsilon$$

• הינה: אם $x_n \rightarrow +\infty$ מתקיים $f(x_n) \rightarrow l$

* נסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ אם:

• קש: $\forall M \exists \delta > 0$ כך של $0 < |x - a| < \delta$ אז

$$f(x) > M$$

• הינה: אם $x_n \rightarrow a$ מתקיים $f(x_n) \rightarrow +\infty$

משפט: אם $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

קטעי: אם M קיים N כך שלכל $x > N$ נכון $f(x) > M$

הינה, אם $x_n \rightarrow +\infty$ מתקיים $f(x_n) \rightarrow +\infty$

דוגמה: הוכיחו את גודל המעבר למתקיים: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-5}{x+4} = -11$

פתרון: (1) את ההנחה:

תהי x_n סדרה מתכנסת אל -3 , $x_n \neq -3$

לכן $\frac{2x_n-5}{x_n+4} \rightarrow \frac{2 \cdot (-3)-5}{-3+4} = -11$

הנחה
לפיכך

(2) את קטעי:

יהי $\varepsilon > 0$ נתון

$$\left| \frac{2x-5}{x+4} - (-11) \right| =$$

$$= \left| \frac{13x+39}{x+4} \right| = \frac{13|x-(-3)|}{|x+4|} \leq \frac{13|x-(-3)|}{1/2} =$$

דבר
 $x \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2}$

$$= 26|x-(-3)| \stackrel{(*)}{<} \varepsilon$$

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{26}, \frac{1}{2}\right) \text{ נבחר, } |x-(-3)| < \frac{\varepsilon}{26} \Leftrightarrow (*)$$

לכן לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $|x-(-3)| < \delta$ מתקיים $\left| \frac{2x-5}{x+4} - (-11) \right| < \varepsilon$

דוגמה: הוכיחו $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = 0$

פתרון: (1) את קטעי: נשים לב אם $|x| < \frac{\pi}{3}$ מתקיים $\cos x > \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{x}{\cos x} \right| \stackrel{\text{לכן}}{\underset{|x| < \frac{\pi}{3}}{<}} \frac{|x|}{1/2} = 2|x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכן נבחר $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{3}\right\}$

(2) אם הייתה:

$$0 \neq x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הנני מניח

$$\left| \frac{x_n}{\cos x_n} \right| < \frac{|x_n|}{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)$$

הנני מניח: הנני מניח

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x_n = \frac{2}{n}$$

הנני מניח: הנני מניח

$$\cos\left(\frac{2\pi}{2/n}\right) = \cos(\pi n) = (-1)^n$$

אכן לא קיים הגבול אם הייתה.

הנני מניח: $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ו- f פונקציה מתחום

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

הנני מניח: $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ נניח } \implies a \neq x_n \rightarrow a$$

$$f(x_n) \rightarrow l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

$$\varepsilon > 0$$

$$a < x < a + \delta_1 \text{ לכל } \delta_1$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$a - \delta_2 < x < a \text{ לכל } \delta_2$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

$$a < x < a + \delta \leq a + \delta_1$$

$$a - \delta_2 \leq a - \delta < x < a$$

$$\implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (משפט גולד) גולד
 : sc נניח

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad B \neq 0 \quad \text{כשר} \quad (3)$$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (משפט גולד) גולד
 sc נניח

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ g(x) = l$$

הוכחה: נוכיח אפי' הינה

יהי: $x_0 \neq x_n \rightarrow x_0$

$$g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

אפי' (1) מתק"ם

$$f \circ g(x_n) = f(g(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$$

אפי' (2) מתק"ם

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

(משפט גולד) גולד
נניח

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{מתקיים} \quad x_0 \in \text{נקודה}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

sc

אבלות מודם

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{a^x} = 0 \quad a, b \in \mathbb{R} \quad a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

רציפות

הגדרה:

(1) תהי f פונקציה במסגרת (a, b) (או מנקודה) a .
 נאמר של- f רציפה ב- a אם מתקיים $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(2) נאמר של- f רציפה בקטע (α, β) אם f רציפה ב- $a \in (\alpha, \beta)$.

למשל: * תהינן f, g רציפות ב- a . אז $f+g, f-g, f \cdot g, f/g$ רציפות ב- a .

+ נניח f רציפה ב- a ו- g רציפה ב- $f(a)$ אז $g \circ f$ רציפה ב- a .

עובדות: פונקציות אלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן.
 $e^x, a^x, x^a, \log_a x, \cos x, \dots$ (סינוסים, פונקציות טריגונומטריות...)

תרגיל: חשבו:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$a = +\infty \quad \text{או} \quad a = 2 \quad (1)$$

$$a = +\infty \quad \text{או} \quad a = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

(3)

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{1}{-1} = -1$$

(1)

מתקיים עבור x בסביבה מסוימת של 2

רציפות פונקציות טריגונומטריות

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

(2)

למשל

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x+1-1} = \sqrt{x+1}+1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$$

$\uparrow$ בספירה מוקדם
 $\uparrow$ צפון

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}} = "+\infty \cdot 1" = +\infty$$

חלק מן המונה והמכנה $\sim \sqrt{x}$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) \quad (2)$$

$\ln(1)$ מציבים $x=0$ $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e$ לזכור
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) =$ חקלים
 $= \ln(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$

$\lim_{x \rightarrow e} \ln x = \ln e = 1$ מתקיים
 אכן גילוינו של הרכבה פונקציונלית מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

תרחיף : גליל

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = *$$

פתרון (1) מתקיים

משבין גליל
 אם קיימים הגורמים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 \quad \text{מתקיים } \cos \text{ נגזרת}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{המשפט השני}$$

$$* = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x}$$

(2) נשים לב שמתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) =$$

המשפט השני
נניח $x = \frac{1}{t}$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln t}{t}\right) = 0$$

לכן הוא 0

(המשפט של ל' ה' ה')

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1 \quad \text{אכן מתקיים } e^x \text{ נגזרת}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

(3)

נשים לב שמתקיים $x \neq 0$

$$0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

לפי סנדוויץ' נקבל $|x \cos(\frac{1}{x})| \rightarrow 0$ ולכן

$$x \cos \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \quad \text{אם } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \text{ ו-} f \text{ רציפה ב-} x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)) \quad (2)$$

בהנחה של רציפות קומפוזיט

הכרחי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \text{ש"ל} \quad x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (1) \quad \text{ל"ס}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 ל"ס $\uparrow$ $\uparrow$
 ה"ס $\uparrow$ $\uparrow$
 f f

$$= f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(g(x))) = \text{ש"ל} \quad a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (2) \quad \text{ל"ס}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 ל"ס $\uparrow$ $\uparrow$
 ה"ס $\uparrow$ $\uparrow$
 f f

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$$

גרסאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg x)^{\frac{1}{x}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad (2)$$

ל"ס:

$$\text{ש"ל} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{נ"ח}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = A^B$$

כאשר המסקנה מחזרת.
(A חיובי ושל)

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))}$$

הוכחה: (ר"ס)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln(f(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = \ln A$$

מחזרת כל מתקנים

משבין אבול וי"ס e^x מקדים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} = e^{B \cdot \ln A} = A^B$$

$$(1 + tg x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1 + tg x)^{\frac{1}{tg x}} \right]^{\frac{tg x}{x}} = \text{ש"ל}$$

במחזור (1) מתקנים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg x}{x} = 1 \quad \text{חשבוני כ"כ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$$

$\uparrow$
 ה"ס $\uparrow$ $\uparrow$
 $t = tg x$

$$* = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg x)^{\frac{1}{x}} = e' = e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1 + tg x)^{\frac{1}{x}} = e$$

ק"ל: ק"ל

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

(2)

נשים אם נסמך $x > 0$ מתקיים:

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$$

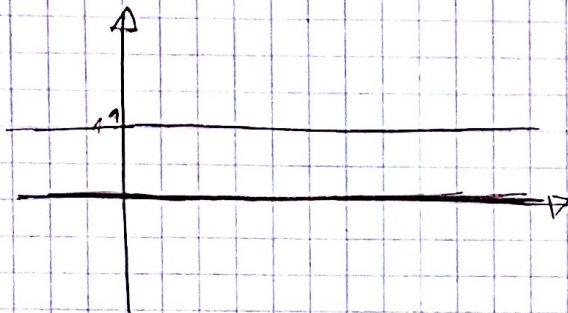
אם

$$1 - x \frac{1}{x} = x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \leq x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

אם כל הסבירות נכונה



דיריכלט (בינה) :

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ד לא יציבה כאן נקודה.

הוכחה: נקח $a \in \mathbb{R}$. ניקח סדרה $x_n \in \mathbb{Q}$ מתכנסת אל a .

ניקח סדרה $y_n \notin \mathbb{Q}$ מתכנסת אל a .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

כל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

אכן לא קיים המגדל $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$

דיריכלט:

$$f(x) = x D(x) = \begin{cases} x & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

אם רק נקודה