

של:

$$\alpha > 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$$

הוכחה:

אם $\alpha \leq 0$ אז $\frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$ ולכן מתבדר.
 נניח $\alpha > 0$, אז $\frac{1}{n^\alpha}$ יורד. לפי הסימיו:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n < +\infty \iff$$

$$\iff 2^{1-\alpha} < 1 \iff \alpha < 2^1 \iff \alpha > 1$$

לוחים כלים

הצורה: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ סדרה, נאמר שלדור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ אם מתכנס בהחלט.

2. מתכנס בנטי, אם היא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

לדבר: אם לדור מתכנס בהחלט אז היא מתכנס.

הוכחה: נניח $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך של $n \geq N$ מתקיים

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

לפי אי שוויון המשולש מתקיים לכל $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=n+1}^m a_k < \varepsilon$$

לפי קריטריון קשי, אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

תוצא: (ל"א אינסופי)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ לדור מתכנס בהחלט. הוכחנו $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

פתרון: (סמן) $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ $s'_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$. לפי ל"א, Δ מתקיים

$$|s_n| \leq s'_n$$

אי שוויון חריש (שער בעלול) ולכן $\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

משפט (מבחן אייכנר)

יהי a_n סדרה חיובית יורדת ולתכנסה $(a_n > 0)$.
אז הסדרה $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ מתכנסת.

דוגמאות לדורים מתכנסים הם: $(a_n = \frac{1}{n} > 0)$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$

תרגיל:

האם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n^4}$ מתכנס? $\alpha \in \mathbb{R}$
מתכנס בהחלט? במיני?

פתרון:

ראו n מתקיים $\left| \frac{\sin(n\alpha)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$
 $\sum \frac{1}{n^4}$ מתכנס ולכן לפי מבחן המונחה מתכנס $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n^4}$ בהחלט ולכן מתכנס.

משפט היטן (לא בהכרח):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ סדרה מתכנסת במיני. אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ או $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$,
 נניח לסדרה a_n איברי הסדרה a_n מוגד n שיהיה a_n מתכנס $\sum a_n$.
 בקוטר, נניח לארבע שיהיה a_n מתכנס $\sum a_n$.

משפט:

אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum b_n$ סדרה סכימה לא
 משפטים $\sum a_n$ סכימה לא.

סדר חזקות

סדר חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ כאשר a_n מסומן
 $x, x_0 \in \mathbb{R}$

- הסדרה: 1. (זכור) $0^0 = 1$
2. ~~מספר~~ מספרים a_n עבור פונקציה $f(x)$
3. מצב נקודת $x_0 = 0$

משפט (קריי-הרדט):
 יהי סדר חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ נסמן
 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$$\left(\begin{array}{ll} \text{אם } \lim = 0 & \text{אז } R = +\infty \\ \text{אם } \lim = +\infty & \text{אז } R = 0 \end{array} \right)$$

1. אם $|x-x_0| < R$ אז סדר חזקות מתכנס.
 2. אם $|x-x_0| > R$ אז סדר חזקות מתפוצץ.
- R נקרא רדיוס התכנסות של סדר.

הוכחה:
 נקבע x ונסמן

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n (x-x_0)^n|}$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} =$$

$$= |x-x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x-x_0| \cdot \frac{1}{R}$$

אם $|x-x_0| < R$ אז $l < 1$ ולפי מבחן הסדרה מתכנס בהחלט.

אם $|x-x_0| > R$ אז $l > 1$ ואז עבור אינסוף n -ים מתקיים $\sqrt[n]{|a_n (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

$$\Downarrow$$

$$|(x-x_0)^n a_n| > 1 \Rightarrow a_n (x-x_0)^n \not\rightarrow 0$$

לכן סדר חזקות מתפוצץ.

במקרה $R = 0$ או $R = +\infty$ הנחנו x .

סעיף: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ של R (הקוטר של R)
 אם קיים הסדרה
 המחר:

נניח $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, ונניח $l \neq 0, +\infty$, אזי באמצעות מתקיים:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

תרגיל: מצא את רדיוס התכנסות של הסדרה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2n}} (x-2)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^{3n} \quad .2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^n + e^n} (x+1)^n \quad .3$$

פתרון:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{2n}}} = \text{סעיף 1.}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{2n}}} \quad 1 \leq \sqrt[n]{n^{2n}} \leq \sqrt[n]{n^{2n}} \rightarrow 1 \quad \text{מתקיים}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^{2n}}} = 1$$

מכאן הסדרה מתכנסת עבור

$$\Downarrow \\ R = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{שכאן}$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{k+1}{2^k} & n=3k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[3k]{a_{3k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[3k]{\frac{k+1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$R = \sqrt[3]{2} \quad (=)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} + n$$

מס' B' אס 1977 הסכום 6

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n+2}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} = 2$$

$$f = x^3 \quad \text{NO}$$

שלילי מתקן, $|f| = |x^3| < 2$

SC $|x| < \sqrt[3]{2}$ NC

732/11 765 SN $|t| = |x^3| > 2$

src $|X| > \sqrt[3]{2}$ ok

$$R = \sqrt[3]{2} \quad \text{jon}$$

$$\left(\frac{n^2}{\pi^n + e^n} \right)^{1/n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{(\pi^n (1 + (\frac{e}{\pi})^n))^{1/n}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{\sqrt[n]{1+\left(\frac{e}{\pi}\right)^n}}^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}}$$

$$R = \mathbb{A}$$

תחבול :

חשבון ריבויים מתכנסות $\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^{kn}$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ ו- $k \in \mathbb{N}$

פתיח

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C^n|}{|C^{n+1}|} = \rho^* \text{ מנקודה, } \sum_{n=0}^{\infty} C^n + n \quad (R' \text{ מנקודה } \rho^* \text{ מנקודה } \rho^*)$$

s/c $t = x^k$ (NO)

$|H| = |x^k| > \frac{1}{|c|}$

$|f| = |x^k| < \frac{1}{|c|}$
 $\Rightarrow |x| < \sqrt[k]{\frac{1}{|c|}}$

$$R = \frac{1}{\sqrt{|C|}} \quad \text{pf}$$

תרגיל:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$$

תסבנו רדיוס התכנסות ~~ה~~ עבר

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

שרי

פתרון: נסמן $a_n = \begin{cases} n & n=k! \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k!]{|a_{k!}|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k!]{k!} = 1$$

כי $\sqrt[k!]{k!}$ ח"ס
נ"ח

פונקציות

הסדרה: תהייה A, B קבוצות.

1. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא תצורה ~~אחת~~ וזו סריגה

$$\sim A \text{ או } B \quad \left(\begin{array}{l} \text{לכל } \alpha \in A \text{ קיים יחיד } \beta \in B \\ \text{המתאים לו. מסומן } f(\alpha) = \beta \end{array} \right)$$

2. A קבוצת התחום של f . מסומנת $\text{Dom}(f) = A$.

3. B קבוצת טווח של f . מסומנת $\text{rng}(f) = B$.

4. התמונה של f היא $\text{Im}(f) = \{ \beta \in B \mid \beta = f(\alpha) \mid \alpha \in A \}$.

גבולות של פונקציות:

1. $f: A \rightarrow B$ קרנה חד-חד אם לכל $x_1, x_2 \in A$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

מתקיימת הפירוק:

2. נאמר של f על B אם לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך של:

$$f(x) = y \quad B = \text{Im}(f) \quad \text{בניסוח שקול}$$

תוצאה: יהי $\alpha < \beta$, $\gamma < \delta$.

מצאנו פונקציה $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [\gamma, \delta]$ וגזים α .

פתרון: נחשב פונקציה מהצורה $f(x) = Ax + B$ (נדרש):

$$f(\alpha) = \gamma$$

$$f(\beta) = \delta$$

$$\gamma = f(\alpha) = A\alpha + B$$

(מצאנו A, B מתאימים)

$$\delta = f(\beta) = A\beta + B \Rightarrow \delta - \gamma = A\beta + B - A\alpha - B = A(\beta - \alpha)$$

$$A = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha}$$

$$\gamma = f(\alpha) = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \cdot \alpha + B \Rightarrow B = \gamma - \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \cdot \alpha$$

נראה של f מוגדרת היטב.

$$f(x) = \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} x + \gamma - \frac{\delta - \gamma}{\beta - \alpha} \cdot \alpha \quad (\text{בבטח})$$

הצבה:

פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ תיקרא מחזורית אם קיים $T > 0$
 כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = f(x+T)$

דוגמה:

האם $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x$ מחזורית?

פיתרון:

נניח בשלילה שקיים T מחזור.

אם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) = \cos(x+T) + \cos(\sqrt{2}(x+T))$$

בפרט נקבעו סבור $x=0$:

$$1+1=2 = \cos T + \cos \sqrt{2}T$$

$$\cos T = \cos \sqrt{2}T = 1$$

$\cos x \leq 1$
 $x \in \mathbb{R}$

לכן יש $n, k \in \mathbb{Z}$ כך ש:

$$\begin{cases} T = n\pi \\ \sqrt{2}T = k\pi \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$$

בסתירה

שאלה: האם תמיד לפונקציה מחזורית (לא קבועה) קיים מחזור טניסלי?

נציג $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

יהי $x \in \mathbb{R}$ וקדם $0 < q \in \mathbb{Q}$ כזה ש:

• אם $x \in \mathbb{Q}$ אז $x+q \in \mathbb{Q}$ ואכן

$$D(x) = D(x+q) = 0$$

• אם $x \notin \mathbb{Q}$ אז $x+q \notin \mathbb{Q}$ ואז $D(x) = D(x+q) = 1$

הראינו ש q מחזור.

אם אין מחזור טניסלי, כי $0 < q \in \mathbb{Q}$ הוא מחזור.

ע. נחלק, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מהי:

1. $x \in \mathbb{R}$ כך $f(x) = -x$ נכונה, נניח f .

2. $y \in \mathbb{R}$ כך $f(-x) = -f(x)$ נכונה, נניח f .