

3.12.15

קט' סדרות

הצגה - סדרה a_n אקטו סדרה קט' אם $\epsilon > 0$
 קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלע $n, m \geq N$ מתקיים $|a_m - a_n| < \epsilon$

הערה

1. נניח שקל לסדרה קט' - אם $\epsilon > 0$ קיים N כך שלע $n \geq N$

$$|a_{n+k} - a_n| < \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

2. a_n סדרה קט' אם קיים $\epsilon > 0$ כך שלע $N \in \mathbb{N}$ קיימים

$$|a_m - a_n| \geq \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

של

היה a_n סדרה. a_n מתכנסת אל a סדרה קט'.

הוכחה:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

הוכחנו כי הסדרה מתכנסת.

סביון:

נראה של a_n סדרה קט'.

$$|a_m - a_n| = \quad \text{יחי } \epsilon > 0, \text{ סבור } m > n \text{ מתקיים:}$$

$$= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{(k-1)k} \right) = \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \stackrel{(*)}{\leq} \epsilon \quad \text{כאשר } n > \frac{1}{\epsilon}$$

$$N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1$$

לפי $n, m \geq N$ יתקיים הדבר.

הוכחה:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

הוכחנו כי הסדרה מתכנסת.

סביון:

נראה ש a_n אינה סדרה קט'. $\forall n$ מתקיים

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} > n \cdot \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{4} \quad \forall n, 2n \geq N$$

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{4}$$

הקדמה:

תהי a_n סדרה ויהי $0 \leq c < 1$ קבוע. נניח של n מתקיים:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq c |a_{n+1} - a_n|$$

הוכיח a_n מתכנסת.

פתרון:

נראה ש a_n סדרה קושי. נשים לב ש-

$$|a_4 - a_3| \leq c |a_3 - a_2| \leq c^2 |a_2 - a_1|$$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c^{n-1} |a_2 - a_1|$$

באמצעות הוכחה אפסית אינדוקציה

נסבור n, m כלשהם מתקיים

$$|a_m - a_n| =$$

$$= |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + (a_{m-2} - a_{m-3}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)| \leq$$

$$\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\leq (c^{m-2} + c^{m-3} + \dots + c^{n-1}) |a_2 - a_1| =$$

$$= c^{n-1} (1 + c + c^2 + \dots + c^{m-n+1}) |a_2 - a_1| =$$

$$= c^{n-1} \cdot \frac{1 - c^{m-n+1}}{1 - c} \cdot |a_2 - a_1| \leq \frac{c^{n-1}}{1 - c} |a_2 - a_1| \cdot \frac{1 - c^{m-n+1}}{1 - c}$$

$$\frac{c^{n-1}}{1 - c} |a_2 - a_1| < \varepsilon \quad \text{יהי } \varepsilon > 0, \text{ ניקח } N \text{ כך של } n \geq N \text{ מתקיים:}$$

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{אם } m > n \geq N$$

סדרות

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

הצגה - וקטור a סדרה (סדרה)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ קבוצה סדרה הסכומים החלקיים של הווקטור

(2) אם S_n מתכנסת $\wedge \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת וסכומה l

(3) אם S_n מתכנסת אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(4) אם a_n לא מתכנסת אז S_n לא מתכנסת.

כל a_n (קבוצה) הווקטור a_n חסום.

(5) אם קיים הסכום $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת.

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(1) $a_n = q^n$ סדרה $q \in \mathbb{R}$ ו- $|q| < 1$

אם $|q| < 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ מתכנסת

(2) ראשוני של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ מתכנסת.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתכנסת לאינסוף. (ראשוני)

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנסת $\iff \alpha > 1$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

משפט

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסת ו- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ אז a_n חסום.

הוכחה

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l - l = 0$$

אם l סדרה חסומה

של (תסביר לי): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מכונים - סדר

(1) אם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מכונים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מכונים
(2) אם $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ מכונים $c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $c \neq 0$

הערה: יש להבין שהסדרים הם סדרה מסוימת.

הערה: אם $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ מכונים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מכונים.

של (קריאה חזרה):

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מכונים $S_n \iff$ סדרה קיימת.

במקרה - אם $\epsilon > 0$ יש N כך של $m > n \geq N$ מתקיים
$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \epsilon$$

הערה

הכינוי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ מכונים ושלם מכונים.

במקרה:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + Bn}{n(n+2)} \Rightarrow 1 = A(n+2) + Bn =$$

$$\Rightarrow 1 = n(A+B) + 2A \Rightarrow \begin{aligned} A+B &= 0 \\ 2A &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \\ B &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

הערה:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$\stackrel{\text{רשימת אינסופית}}{\Rightarrow} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

הערות נוספות:
הערות
 $\frac{3}{4}$

וגדל:

תהי a_n סדרה יורדת. נניח שלדור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
הוכיחו שלד $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

פתרון:

יש להוכיח ש $a_n \geq 0$ (כי a_n יורדת)
לפיכך הסדרה החד-חדית שלילית וראוי לכתוב:

נבחר $n=2k$:

יהי $\varepsilon > 0$. S_n סדרה קוסי, לכן יש N כך שלכל $k \geq N$

$$|S_{2k} - S_k| = \sum_{j=k+1}^{2k} a_j < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$k \cdot a_{2k} \leq \sum_{j=k+1}^{2k} a_j < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2ka_{2k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{לכן} \quad 2ka_{2k} < \varepsilon$$

באותו אופן נראה ש $2k+1$ $\checkmark$ נראה.

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

מבולני התכנסות אלמנטרית חיובית

הצורה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{נראה ש} \quad a_n \geq 0$$

הסדרה a_n חיובית, לכן S_n סדרה הולכת וגדלה.
אם סדרה S_n היא M או מתכנסת.

משפט: (מבחן ההשוואה II)

נניח ש $0 \leq a_n \leq b_n$ והנ"ל.

$$(1) \quad \sum a_n < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum b_n < +\infty$$

$$(2) \quad \sum a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum b_n = +\infty$$

הוכחה:

(סנדוויץ' סדרה) הסכומים מתקרבים.

משפט: (משפט הסוגה II) $\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum b_n$ מתכנס

אם $a_n, b_n > 0$ ו- $a_n \sim b_n$

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L < +\infty$$

(אם a_n מתכנס אז b_n מתכנס ובהפך)

$$\sum a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum b_n < +\infty$$

הוכחה:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

$\Rightarrow$ נניח $\sum b_n < +\infty$. ניקח N_1 כך של- $n \geq N_1$ מתקיים

$$\frac{a_n}{b_n} \leq s+1 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq (s+1)b_n$$

מתכנס אילו, נקבל: $\sum (s+1)b_n < +\infty$

ומכאן הסוגה I נקבל $\sum a_n < +\infty$

$\Leftarrow$: ניקח $\varepsilon > 0$ ק $L - \varepsilon > 0$

ניקח N_2 כך של- $n \geq N_2$ מתקיים $\frac{a_n}{b_n} > L - \varepsilon \Rightarrow a_n > (L - \varepsilon)b_n$

ובמתקדים, הדבר נכס משפט הסוגה I ומשפט אילו.

משפט:

אם קיים הסדר $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ אז $\sum a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum b_n < +\infty$

וכאן:

נמן ל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אור חיוני מתכנס.

הוכיחו אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

סדרון:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם $a_n \rightarrow 0$ והנ"ל מתקיים $0 \leq a_n \leq 1$

$$0 \leq a_n^2 \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$$

אם מתכנס הסדר

הרצף:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2-3)}} \quad \text{מכנס?}$$

החס

סדרון:

מקיים

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2-3)}} \leq \frac{1}{\sqrt{n(n^2-\frac{n^2}{2})}} = \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sum \frac{\sqrt{2}}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{מכנס} \quad \left(\frac{3}{2} > 1 \right) \quad \text{אם נסתכל}$$

סדרון נוסף:

מקיים

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2-3)}} \bigg/ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n(n^2-3)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n^3}{n^2-3n}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{3}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 > 0$$

$$\text{אכן, אם נסתכל הרצף II, הרי שכל מכנס} \quad \sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \text{מכנס} \quad \leftarrow \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n(n^2-3)}} \quad \text{מכנס.}$$

הרצף:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \text{מכנס?}$$

החס

סדרון:

מקיים

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$$\text{הרצון שכלול} \quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{מכנס, אכן, אם הרצף I}$$

$$\sum (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad \text{מכנס}$$

סדרון נוסף:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \sqrt{n+1} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

נשים לב ש-

$$\alpha > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$$

משפט (מבחן שורש קרי)

יהי $\sum a_n$ סדר חזרי ונניח $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, $l \neq 1$:

(1) אם $l < 1$ הסדר מתכנס.

(2) אם $l > 1$ הסדר מתפזר.

הוכחה:

(1) נניח $l < 1$.

ניקח $\epsilon > 0$ כך ש $l + \epsilon < 1$.

ניקח N כך לכל $n \geq N$ מתקיים $\sqrt[n]{a_n} < l + \epsilon$.

$$a_n < (l + \epsilon)^n$$

הסדר $\sum (l + \epsilon)^n$ מתכנס כי $l + \epsilon < 1$.

ולפי האיגוואר I, אם $\sum a_n$ מתכנס.

(2) נניח $l > 1$.

ניקח $\epsilon > 0$ כך ש $l - \epsilon > 1$. סבור אנו כי:

$\sqrt[n]{a_n} > l - \epsilon > 1$ מתקיים

$\Rightarrow a_n > 1 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n$ לא מתכנס

משפט (מבחן הנדסה דיאלמטר)

תהי $a_n > 0$ סדרה. נניח שקיים הגבול $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(1) אם $l < 1$ הסדר מתכנס.

(2) אם $l > 1$ הסדר מתפזר.

הוכחה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

אם משפט דיאלמטר

הפרש שני מהמשפט הקודם.

אם קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז קיים $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

תרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2015}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}$$

בדיקת התכנסות חזרה

סדרה:

שלש במבחן הנסיים:

$$\frac{(n+1)^{2015}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \bigg/ \frac{n^{2015}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2015} \cdot \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1 \Rightarrow \text{החזרה מתכנסת.}$$

גרסה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

בדיקת התכנסות חזרה

סדרה:

שלש במבחן הנסיים:

$$\sqrt[n]{2^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e} < 1$$

לכן מתכנסת.