

26. 11.15

הצגה - a_n ו- (a_n) סדרה ווקלית (a_n) סדרה סדורה
 בלכסית. של הסדרה (a_n) נקראת סדרה
 של (a_n) .

למשל: $a_n = \frac{1}{n}$ $a_n = 2^k$ $a_{nk} = \frac{1}{n_k} = \frac{1}{2^k}$

סדרה מתכנסת אפ"כ ב- a סדרה של מתכנסת לא a הסדרה.
 (בולבני - וירג'ילוס):

סדרה סדורה קימה סדרה מתכנסת.

לספר: סדרה של a_n מתכנסת במובן הרגיל.

הוכחה: a_n סדרה.

אם a_n מתכנסת, יש לה סדרה מתכנסת אפ"כ.

נניח a_n לא מתכנסת, בהכרח אפ"כ.

נבחר בסדרה סדרה של אינדקסים k_n כך:

$k=1$: a_{k_n} לא מתכנסת אפ"כ קיים n כך ש- a_{k_n}

נקרא a_{k_n} כסדרה.

לכן: נניח להפך, כל $a_{k_n} < a_{k_{n+1}} < \dots < a_{k_{n+1}}$ כל $a_{k_n} < a_{k_{n+1}}$

מתקיים $a_{k_n} \geq a_{k_{n+1}}$

a_n לא מתכנסת, אפ"כ a_n $\max\{k, a_1, a_2, \dots, a_{k_n}\} < a_n$

נקרא a_n כסדרה ונסתעב a_n . ונשים לב ש- $a_n > a_{n-1}$

$$a_{k_n} \geq k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow a_{k_n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty$$

לכן: a_n סדרה a_n ו- $a_n \in L$. נניח a_n סדרה a_{k_n}

$$a_{k_n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L$$

אם סדרה a_{k_n} כך ש-

$$a_n \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L$$

הוכחנו ש-

פירוט:

ניח ברורה של Δ מוכנס ל $\mathbb{R}^n$ ו Δ סגור

$$(*) |a_n - L| \geq \varepsilon \quad \rightarrow \quad n > N \quad \text{e. } N$$

לדגור $\sum_{k=1}^n (u_k)$ ורבה סדרת G ה- n -ים נכנסה מתקיים (על).

• $\text{Onk}_\ell \xrightarrow{\text{מקבילי}} L$ ו $\text{Onk}_\ell, \text{Onk}$ הן $\mathcal{O}^1$ ו $\mathcal{O}^2$ ממשותף

גבול סמירה, שק אוף אק"מ (★).

הזמנת-הן a_n סוגה $LE[-\infty, +\infty]$. $(u_n) \subset L^2$ סבול $\sqrt{n}$.

• L ۱۱۲۲۲۲ a_n ۱۲ ۰/۱ ۲, ۳ a_n ۱۲

$PL(A_n)$ UNION A_n IS STRONG LITERAL IN Σ

[illegible]
$$(0_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)) \quad |0_n - L| < \varepsilon \quad \text{نعم، نعم}$$

משפט: a_n מתכנס, הוכחנו כ.

הוכחה: נניח שיש סדרות a_n ו- b_n המקיימות את התנאים הנ"ל.

ד. A_n איז ק-מאטריק: " $\equiv$ "

הנחה: " $\leq$ " של $\mathbb{R}$

ה'. $L \in PL(A_n)$ יוקרא $L \in PL$ אם $\exists k \rightarrow \infty$ $A_{n_k} \rightarrow L$.

מבין הקבוצות $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ זוגי}\}, \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ אי-זוגי}\}$ מכילה

• N_k מספר ~~הקשרים~~ k ים

בה"כ נניח כי יש אינסוף איברים n_k כ $\{2n | n \in \mathbb{N}\}$.

לפיכך נקבע כי a_{n_k} היא סדרת קוסינוסים.

• $\text{Anker} \rightarrow L$.1 O_{2n} ~~1~~ 2 3 4 5

$\{H_k^{(j)}\}_{k=1}^N, 1 \leq j \leq N$

$$\mathbb{N} = \{n_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \cup \dots \cup \{n_k^{(N)}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{O'Neil}$$
$$PL(a_n) = PL(a_{n_k}^{(1)}) \cup \dots \cup PL(a_{n_k}^{(w)}) \quad \text{SIC}$$

גרסה: מצאנו את $PL(a_n)$ עבור סדרה $a_n = (\cos \frac{\pi n}{3})^n$
 בגרסה: נמצא את $PL(a_n)$ לפי אופייניות האות a ב-3.

$$\begin{aligned} a_{3n} &= (\cos \pi n)^{3n} = ((-1)^n)^{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n \\ a_{3n+1} &= (\cos \frac{(3n+1)\pi}{3})^{3n+1} = (\cos(\pi n + \frac{\pi}{3}))^{3n+1} \\ &= (\frac{(-1)^n}{2})^{3n+1} = \frac{(-1)^{3n+1}}{2^{3n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ a_{3n+2} &= \dots = (-1)^{3n^2+3n+2} \cdot \frac{1}{2^{3n+2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

לפי האופייניות הקבוצה, נקרא $PL(a_n) = PL(a_{3n}) \cup PL(a_{3n+1}) \cup PL(a_{3n+2})$

ראינו: $PL(a_{3n+1}) = PL(a_{3n+2}) = \{0\}$

הוא: $PL(a_{3n}) = \{1, -1\}$

לכן: $PL(a_n) = \{0, 1, -1\}$

גרסה: נחשב סדרה a_n ו- a_{2n}, a_{2n+1}, a_{5n} מתכנסות.
 הוכחנו כי a_n מתכנס.

בגרסה: נסתם: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{5n}$

לפי האופייניות הקבוצה: $PL(a_n) = PL(a_{2n}) \cup PL(a_{2n+1}) = \{a, b\}$

שם אף a_{5n} הוא a_{2n} ו- a_{2n+1} (אם a_{10n})

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{10n} = c \Rightarrow a = c$

כמו כן, a_{5n} הוא a_{2n+1} ו- a_{2n} (אם a_{10n+5})

$b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{10n+5} = c \Rightarrow b = c$

לכן $a=b$ ו- $PL(a_n) = \{a\}$

$\Downarrow$
 $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

המשפט: a_n סדרה. הוכיח כי $PL(a_n)$ קבוצה סגורה.

בהוכחה: נניח $l \in PL(a_n)$, ונניח $l_i \rightarrow l$.

אז נקרא $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} l$.

נבחר באינדקס k אז $a_{n_k} \in PL(a_n)$ ו $|a_{n_k} - l| < \frac{2}{k}$.

עבור $k=1$: נקרא i_1 כך ש: $|l_{i_1} - l| < 1$.

נקרא m_1 כך ש: $|a_{n_{m_1}}^{(i_1)} - l_{i_1}| < 1$.

אז $n_1 = n_{m_1}^{(i_1)}$ ו $|a_{n_1} - l| =$

$$= |a_{n_1} - l_{i_1} + l_{i_1} - l| \leq |a_{n_1} - l_{i_1}| + |l_{i_1} - l| < 2$$

נניח: $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$ כבר.

נקרא i_k כך ש: $|l_{i_k} - l| < \frac{1}{k}$.

נקרא m_k כך ש: $|a_{n_{m_k}}^{(i_k)} - l_{i_k}| < \frac{1}{k}$ ו $n_{k-1} < n_{m_k}^{(i_k)}$.

אז $n_k = n_{m_k}^{(i_k)}$.

$$|a_{n_k} - l| \leq |a_{n_k} - l_{i_k}| + |l_{i_k} - l| < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k}$$

$$|a_{n_k} - l| < \frac{2}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} l$$

המשפט: a_n סדרה.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup \{ a_m \mid m \geq n \} \right)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf \{ a_m \mid m \geq n \} \right)$$

(100)

1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \max (PL(a_n))$

ג' מסד a_n נקודים

2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \min (PL(a_n))$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

הסדר a_n מוכנס נקודים

לדבר

1. אם $a_n \leq L$ הן נקודים מסודים (הנני) של $\limsup a_n \leq L$

2. אם $a_n \geq L$ הנייה של $\liminf a_n \geq L$

3. אם $a_n \leq L$ סביר אינך חיים של $\liminf a_n \leq L$

4. אם $a_n \geq L$ סביר אינך חיים של $\limsup a_n \geq L$

הוכחה

א. נניח $a_n \leq L$ הנני, של a_n מסדר נקודים

$a_{n_k} \leq L$ הנני. אכן $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq L$ אכן $\max(PL(a_n)) \leq L$

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L$

2 מסד 1.

3 מסד 4.

4. נניח $a_n \geq L$ סביר אינך חיים. $a_{n_k} \geq L$ מסדר נקודים

$a_{n_k} \geq L$ מסדר נקודים. $a_{n_k} \geq L$ מסדר נקודים B-W מסדר נקודים

הנני $a_{n_k} \rightarrow L$

לכן $a_{n_k} \geq L \geq L$ אכן $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq L$

לדבר: יהי $L \in \mathbb{R}$ מסדר a_n של $L = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

נקודים מסדרים: אכן $\epsilon > 0$ אכן $N \in \mathbb{N}$ אכן p

$a_n < L + \epsilon$ אכן $n > N$

אכן $N \in \mathbb{N}$ אכן $\epsilon > 0$ אכן $n > N$

$a_n < L - \epsilon$ אכן n

(הוכח סדרים)

גרסה: גרסה a_n, b_n סדרה. נסמן
 $\bar{A} = \limsup a_n$ $\underline{A} = \liminf a_n$ $\bar{B} = \dots$ $\underline{B} = \dots$

ענין רשומה $a_n \leq b_n$

הוכחה כי: 1) $\bar{A} \leq \bar{B}$ 2) $\underline{A} \leq \underline{B}$

כגון:

1) אם $\bar{B} = +\infty$ אזי מה להוכיח.

אם $\bar{B} = -\infty$ אז $a_n \rightarrow -\infty$ ולכן, $b_n \rightarrow -\infty$ וכן $\bar{A} = \bar{B}$

ענין $\bar{B} \in \mathbb{R}$

יהי $\varepsilon > 0$ ו N_1 כך של $n > N_1$ מתקיים $b_n < \bar{B} + \varepsilon$

ו N_2 כך של $n > N_2$ מתקיים $a_n \leq b_n$

נסמן $N = \max(N_1, N_2)$ אז $n > N$ אז $a_n < \bar{B} + \varepsilon$

אכן $\bar{A} \leq \bar{B} + \varepsilon$

הדבר נכון לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $\bar{A} \leq \bar{B}$
 (נניח כדליל $\bar{A} > \bar{B}$ ונניח $\varepsilon = \frac{\bar{A} - \bar{B}}{2}$ ונניח $\bar{A} > \bar{B} + \varepsilon = \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}$ בסתירה)

(2) הצורה צומת.

כגון נוסף.

נתן גם $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{A}$ ניקח גם b_{n_k} , $b_{n_{k_r}}$

מובנים המרחק L

הטענה $\bar{A} = \lim_{r \rightarrow \infty} a_{n_{k_r}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n_{k_r}} = L$ $\Leftarrow a_{n_{k_r}} < b_{n_{k_r}}$

אכן $\bar{A} \leq \bar{B}$ $\Leftarrow L \leq \bar{B}$ אכן $b_{n_{k_r}}$ גם b_n ולכן

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq (3)$$

הוכחה: a_n היא סדרה חיובית.

$$\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \stackrel{(1)}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \stackrel{(1)}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

סעיף 1

(2) $(\min PL, \max PL)$ $\limsup, \liminf$ והקשר ביניהם

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(1) נניח

אם $L = 0$ אז $a_n \rightarrow 0$ מהר מאוד.

אם $L > 0$ אז $a_n \rightarrow 0$ לא כל כך מהר.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \geq N \quad \varepsilon > 0$$

$$\frac{a_n}{a_N} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} < (L + \varepsilon)^{n-N}$$

$$< (L + \varepsilon)^{n-N} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_N} (L + \varepsilon)^{1 - \frac{N}{n}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{a_N}{(L + \varepsilon)^N}} (L + \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L + \varepsilon$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L$$

הצד השני של האי-שוויון נובע מ



(3) כלל הזהב