

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{2n-1}$$

3. (27)

השאלה

הנחה

הוכחה

$$\frac{2n+1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}}$$

$$b_n = n - \frac{1}{2} \quad \text{כאשר}$$

$$\left(1 + \frac{1}{b_n} \right)^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$$

הנחה (הוכחה) נכונה

$$\left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{2n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{2n-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{n-\frac{1}{2}} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n-\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^2$$

$$\left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \text{כאשר } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \text{ ו- } a_n \text{ אינו } 0$$

הוכחה

$$\left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^{a_n} = \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^{a_{n-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^{a_n - a_{n-1}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^{a_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \text{וכאשר } \left(1 + \frac{1}{a_{n-1}} \right)^{a_n - a_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

4. (27)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \text{אם } a_n > 0 \text{ ו- } a_n \neq 1 \text{ לכל } n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$$

$$a_n^{\frac{a_n}{a_n-1}} = a_n^{1 + \frac{1}{a_n-1}} = \left(1 + \frac{1}{a_n-1} \right)^{1 + \frac{1}{a_n-1}} = *$$

הוכחה

הוכחה

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{כאשר } b_n = \frac{1}{1-a_n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{b_n} \right)^{b_n} = \frac{1 + \frac{1}{b_n}}{\left(1 + \frac{1}{b_n} \right)^{b_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/e} = e$$

הערה 5:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$$

הוכחה

הוכחה

$$e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \quad \text{לכל } n \text{ טבעי}$$

$$\sqrt[n]{e} < (1 + \frac{1}{n})^{\frac{n+1}{n}} = (1 + \frac{1}{n})^{1 + \frac{1}{n}} \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{n}{n^2} \leq (1 + \frac{1}{n^2})^n \quad \text{לכל } n \text{ טבעי, לפי אי-שוויון ברנולי}$$

$$(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

$$n(\sqrt[n]{e} - 1) \leq n \left((1 + \frac{1}{n})^{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \leq n \left((1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{1}{n}) - 1 \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$n(\sqrt[n]{e} - 1) \geq 1$$

ולכן

$$\sqrt[n]{e} - 1 > \frac{1}{n}$$

$$e > (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) \rightarrow 1$$

לפי ההערה 5

דוגמה 10

הוכחה:

1. קבוצת $U \subseteq \mathbb{R}$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in U$ קיים

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U \quad \text{עבור } \epsilon > 0$$

דוגמאות: $\{1\}$ אינו פתוח, $(0, 2)$ פתוח.

2. קבוצת $F \subseteq \mathbb{R}$ נקראת סגורה אם לכל סדרה a_n ב-

אנחנו F מתכנסת ל- a , $a \in F$. דוגמאות: $[1, 5]$

הערה 6: מה $A \subseteq \mathbb{R}$ סגורה A פתוח או סגור $\mathbb{R} \setminus A$.

הוכחה

$\Rightarrow$ גב' A פתוח.

גב' $a_n \in \mathbb{R} \setminus A$ שזרם מס סבו ל.

ע"י שלילי ג' $\mathbb{R} \setminus A$, סלומר, אלא.

A פתוח, אכן ק"מ $\epsilon > 0$ כ ϵ $(l-\epsilon, l+\epsilon) \subseteq A$

ק"מ N כ לכל $n > N$ מתקיים $|a_n - l| < \epsilon$ $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$

$$a_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

ואי סתירה כי אם מתקבל $a_n \in A$ לכל $n > N$ אז $a_n \in \mathbb{R} \setminus A$.

$\Rightarrow$ ע"י $\mathbb{R} \setminus A$ סגור.

ע"י שלילי אל A לא פתוח. סלומר, ק"מ $x \in A$ כ לכל

$\epsilon > 0$ מתקיים $(x - \epsilon, x + \epsilon) \not\subseteq A$.

אכן נבחר a_n כ $a_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ $a_n \notin A$

אז $a_n \in \mathbb{R} \setminus A$ ומתקיים $|a_n - x| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

אכן $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ולכן $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

אכן $\mathbb{R} \setminus A$ סגור ולכן $x \in \mathbb{R} \setminus A$ בסתירה.

לסיום:

1. איחוד של אינסוף סדרות קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

2. חיתוך מספר סופי של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הוכחה

1. יהי $\{U_i\}_{i \in I}$ אינסוף קבוצות פתוחות. נסמן $U = \bigcup_{i \in I} U_i$.

ונבדוק ש U פתוחה.

יהי $x \in U$ ק"מ $j \in I$ כ $x \in U_j$. U_j פתוחה, אכן, ל

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i = U$$

2. יהי $U_1, \dots, U_n$ קבוצות פתוחות. נסמן $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$. נבדוק ש U פתוחה.

יהי $x \in U$. אז $x \in U_i$ $1 \leq i \leq n$. אכן ל $\epsilon_i > 0$ כ $(x - \epsilon_i, x + \epsilon_i) \subseteq U_i$

$$(x - \epsilon_i, x + \epsilon_i) \subseteq U_i \quad \epsilon = \min(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \quad \text{נסמן}$$

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = U \quad \text{אכן}$$

מסקנות:

1. חיתוך של אינסוף קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.
2. איחוד של מספר סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה.

הוכחה

אנחנו יודעים ש- $\{F_i\}_{i \in I}$ אינסוף של קבוצות סגורות.

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathbb{R} \setminus F_i$$

חוקי דה מורג

כל $x \in \mathbb{R} \setminus F_i$ פירושו, $x \notin F_i$, ולכן $x \in \mathbb{R} \setminus F_i$ פירושו, $x \notin F_i$.

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N F_i \right) = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{R} \setminus F_i$$

חוקי דה מורג

כל $x \in \mathbb{R} \setminus F_i$ פירושו, $x \notin F_i$, ולכן $x \in \mathbb{R} \setminus F_i$ פירושו, $x \notin F_i$.

משפט (הנחת קטורה):

בהינתן a_n, b_n סדרות כגון $a_n \leq b_n$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \quad \text{על קיים } c \text{ כגון}$$

דוגמה 6:

האם באמת יש קטורה של $[a_n, b_n]$ כגון $a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$?

הוכחה

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset \quad \text{אכן, אולם}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

משפט (האינדוקציה - סדרה):

יהי $[a, b]$ קטע סגור, יהי $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ אסדרה של קטעים

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$$

אם קיים $j \in I$ כזה ש- $\{(a_i, b_i)\}_{i \in j}$ סופי,

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{i \in j} (a_i, b_i)$$

אם לא,

האם האנדרגט של היקף כזה נכון? נכון? נכון?

1. נחלקים את $[a, b]$ בקטעים סגורים.

2. נחלקים את (a_i, b_i) בקטעים סגורים.

דוגמה

1. a, b איננו הקטע הפתוח $(0, 1)$ מכוסה סדרה $\{(\frac{1}{n}, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ כלל.

אם כן, כיסוי סופי.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}, 1) = (0, 1)$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\frac{1}{n}, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^K (\frac{1}{n}, 1) \text{ שבו } K = \max\{j\} \text{ סופי, } j \in \mathbb{N}$$

$$= (\frac{1}{K}, 1) \neq (0, 1)$$

$$0 < x < \frac{1}{K}$$

$$x \in (0, 1)$$

$$x \in (\frac{1}{K}, 1)$$

2. $[0, 1]$ איננו מכוסה על ידי $\{[-1, 0]\} \cup \{[\frac{1}{n}, 1]\}_{n \in \mathbb{N}}$

כלל כיסוי סופי.