

משפט 3 (הכנסת המעצבים)

תהי a_n סדרה מתכנסת ל $l \in [-\infty, \infty]$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = l$$

סדרה המעצבים מתכנסת לאותו הערך.

הוכחה: נבדוק בשני מקרים:

מקרה 1 - כאשר $l \in \mathbb{R}$ נטל להניח בה"ב $l=0$, כלומר $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - l) \right)$ $a_k - l \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ נבדוק בסדרה

יהי $\varepsilon > 0$, נקח N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

נקח N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $\left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{N_1}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ (קיים N_2 כזה כי $\frac{|a_1 + \dots + a_{N_1}|}{n} \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right| &\leq \frac{|a_1 + \dots + a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} + \dots + a_n|}{n} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} (n - N_1) \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

הוכחנו

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

לכן

מקרה 2 - $l = +\infty$. מכיוון ש $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, הסדרה a_n גושה

למעלה. נטל להניח בה"ב $a_n \geq 0$ (עצום ב a_{n-M})

יהי M ישר N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > 2M$.

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{a_{N_1+1} + \dots + a_n}{n} \geq \frac{1}{n} (n - N_1) 2M = \left(1 - \frac{N_1}{n}\right) 2M >$$

$$> \left(1 - \frac{N_1}{2M}\right) 2M = \frac{1}{2} \cdot 2M = M \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty}$$

משקלה - תהי a_n סדרה חיובית עם גורם סופי d .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} = l \quad \text{שכ}$$

הוכחה: ראי תשובה גורל מקיים $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l}$

אם קיבלו תשובה גורל, נקרא "כ"א":

$$\frac{n}{a_1 + \dots + a_n} = \frac{1}{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}} \rightarrow \frac{1}{1/l} = l$$

משקל המכנסות הממוצעת

תהי a_n סדרה חיובית עם גורם $l \in [0, \infty]$ שכ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = l$

הוכחה: נסא במקרה בו $l \neq 0$. ראי כי שני הממוצעים

מתקיים אף n :

$$\frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n)$$

ובמקרה הראשון:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n) = l$$

לכן משקל המכנסות נובע הדבר.

משקל זיגלמן

תהי x_n סדרה חיובית ונניח שקיים הסדר $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0, \infty]$

אז שכ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

הוכחה: נבדוק סדרה חדשה y_n :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \end{cases}$$

מהנחת משקל:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l$$

מהמשקל שמוכרח, מקבלים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{x_{n-1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_1 \dots y_n} = l$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$: (רש) : (רש)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}}$: (רש) : (רש)
 אפי דאמאר מתקין
 ער קיט דאס היינט.

$$\frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2 + 4n + 2}{n^2 + 2n + 1}$$

$$= \frac{4 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

 (רש) : (רש)

- (רש) : (רש)
 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$ אפי $c > 0$
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ כשר $|q| < 1$
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ כשר $q > 1$

הוכחה :
 1. אפי דאמאר
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot 1$
 2. יהי q כן $|q| < 1$. יהי $0 < \varepsilon < 1 - |q|$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varepsilon} = 1$ אפי 1. מתקין
 אכן קיים N כן $n > N$ מתקין
 $(\varepsilon_n) \quad \sqrt[n]{\varepsilon} > |q| \Rightarrow |q|^n < \varepsilon$

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ הראו

3. יהי $q > 1$. יהי $1 < M$
 כחוקים דים N כן $n > N$ מתקין
 $|M| - 1 < q - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{M} - 1 < q - 1 \Rightarrow \sqrt[n]{M} < q$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ $\because M < q^n$

גורם הממוצע

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

הנני מניח כי a_n הוא מספר חיובי לכל n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{אם } l < 1 \quad \text{אם } l = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{אם } l > 1 \quad \text{אם } l = 1$$

הוכחה

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{1-l}{2}$$

אם $n > N$ אז $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{1-l}{2}$

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{1-l}{2} + l = \frac{1+l}{2} < 1$$

$$a_n < \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

$$0 < a_n < \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

אם $l < 1$ אז $a_n \rightarrow 0$

אם $l > 1$ אז $a_n \rightarrow +\infty$

אם $l = 1$ אז $a_n \rightarrow 0$

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{l-1}{2}$$

אם $n > N$ אז $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \frac{l-1}{2}$

~~אם $l < 1$ אז $a_n \rightarrow 0$~~

$$l - \sqrt[n]{a_n} < \frac{l-1}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1$$

$$a_n > \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \rightarrow +\infty \quad \text{אם } l > 1$$

$$\left(a_n > \left(\frac{l+1}{2}\right)^n \rightarrow +\infty \right) \quad \text{אם } l > 1 \quad \text{אם } l = 1$$

גורם הממוצע

הנני מניח כי a_n הוא מספר חיובי לכל n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{אם } l < 1 \quad \text{אם } l = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{אם } l > 1 \quad \text{אם } l = 1$$

הוכחה

אם $l < 1$ אז $a_n \rightarrow 0$

הפונקציה חסומה כי $|q| < 1$ ו- $|q| > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} q^n = 0$$

$$\frac{|(n+1)^{\alpha} q^{n+1}|}{|n^{\alpha} q^n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} |q| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |q| < 1$$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |n^{\alpha} q^n| = 0$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} q^n = 0$

המשפט הנ"ל (המשפט השני) כי $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha} q^n = 0$ סדרה חסומה.

המשפט

היחס y_n, y_{n+1} סדרה. נניח כי $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ ו- $y_{n+1} > y_n$ ו- $(y_{n+1} - y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L \in [-\infty, \infty]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} = L$$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{y_{n+1}} = L$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$ ו- $t_n = y_n - y_{n-1}$

הוכחה:

$$a_1 = \frac{x_1}{y_1}, a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$y_1 > 0$$

$$t_1 = y_1, t_n = y_n - y_{n-1}$$

$$1) a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

$$2) t_n > 0$$

$$3) \sum_{k=1}^n t_k = y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = L$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$

$$\sum_{k=1}^n t_k a_k =$$

כאן p, q הם מספרים

$$= y_1 \cdot \frac{x_1}{y_1} + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} + \dots + (y_n - y_{n-1}) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

$$= x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n \Rightarrow x_n = \sum_{k=1}^n t_k a_k$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sum_{k=1}^n t_k a_k}{\sum_{k=1}^n t_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$$

$$y_n = \sum_{k=1}^n t_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$$

find the sum : find
p < 0

$$x_n = \sum_{k=1}^n k^p, \quad y_n = n^{p+1}$$

compare the two series

$y_n \rightarrow \infty$, we find y_n

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}}$$

we

compare
p < 0

$$\frac{(n+1)^p}{\sum_{k=0}^n \binom{p+1}{k} n^k - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p - \sum_{k=1}^n \binom{p+1}{k} n^k}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^p}{p+1 + \sum_{k=1}^n \binom{p+1}{k} n^{k-p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \rightarrow 1$$

we have p < 0

$$\binom{p+1}{k} \cdot \frac{1}{n^{p-k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (k > p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

$$A_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

more more : find

$$A_{n+1} - A_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} =$$

find A_n new, more

$$= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \quad \text{H.O.} = \frac{2n+2 - 2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

: it is less than A_n & more more

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \leq n \cdot \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

more more more

$$\frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

more more A_n is

תרגיל: יהי a_n סדרה בעלת הגבול $\sqrt{a}$, נקבע $\epsilon > 0$ כלשהו:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a_n}{x_n}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$$

הוכיחו כי

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a_n}{x_n}}{2} \geq$$

אם x_n שווה לממוצע הנמוך של x_n ו- $\frac{a_n}{x_n}$

$$\geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a_n}{x_n}} = \sqrt{a_n}$$

אכן x_n מסומת ממוצע ≥ 0

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a_n}{x_n}}{2} \leq \frac{x_n + \frac{x_n^2}{x_n}}{2} = x_n \quad (\text{כי } x_n \geq \sqrt{a_n})$$

אכן $x_{n+1} \leq x_n$ ו- $x_n \geq 0$

אכן מתכנסת. נסמן $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + \frac{a_n}{x_n}}{2} = \frac{l + \frac{a}{l}}{2}$$

$$= \frac{l + \frac{a}{l}}{2} \Rightarrow 2l = l + \frac{a}{l} \Rightarrow l^2 = a \Rightarrow l = \pm \sqrt{a}$$

אכן x_n סדרה חיובית אכן $l > 0$, $l = \sqrt{a}$

תרגיל: יהי a_n סדרה מתכנסת l . נניח כי $a_n, l \geq 0$

$$\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{l}, \quad a_n^2 \rightarrow l^2$$

$$k \sqrt{a_n} \rightarrow k \sqrt{l}, \quad a_n^k \rightarrow l^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$q \sqrt{a_n} \rightarrow q \sqrt{l}, \quad a_n^q \rightarrow l^q, \quad q \in \mathbb{Q} \quad (\text{בהנחה } l \neq 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \cdot l = l^2$$

(תבנית גבול)

1. $\epsilon > 0$ יהי $\delta > 0$ קיים N כך $n > N$ מתקיים

$$a_n = |a_n - 0| < \delta^2$$

$$\sqrt{a_n} = |\sqrt{a_n} - 0| < \delta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 0$$

$$|\sqrt{a_n} - 0| = \frac{|a_n - 0|}{\sqrt{a_n} + 0} \leq \frac{|a_n - 0|}{\sqrt{a_n}} \leq \delta, \quad \delta > 0$$

$$\frac{|a_n - 0|}{\sqrt{a_n}} < \delta \Rightarrow |a_n - 0| < \delta \cdot \sqrt{a_n} < \delta \cdot \delta = \delta^2$$

הנבחר, קיים N עבורו $n > N$ מתקיים

ב. $a_n^k \rightarrow l^k$ בהינתן $a_n \rightarrow l$

נראה $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{l}$ עבור $l \neq 0$

1. $l = 0$: קיים N כך של $n > N$ מתקיים $a_n = |a_n - 0| < \epsilon^k$

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{0}| = \sqrt[k]{a_n} < \epsilon$$

2. $l \neq 0$: נשתמש בהצבה $x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1})$

$$x = \sqrt[k]{a_n} \quad y = \sqrt[k]{l}$$

$$a_n - l = (\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{l})(a_n^{\frac{k-1}{k}} + a_n^{\frac{k-2}{k}}l^{\frac{1}{k}} + \dots + a_n^{\frac{1}{k}}y^{\frac{k-2}{k}} + y^{\frac{k-1}{k}})$$

$$0 < (a_n^{\frac{k-1}{k}} + \dots + y^{\frac{k-1}{k}})$$

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{l}| = \frac{|a_n - l|}{(\dots)} \leq \frac{|a_n - l|}{l^{\frac{k-1}{k}}}$$

$$\frac{|a_n - l|}{l^{\frac{k-1}{k}}} < \epsilon$$

$$|a_n - l| < l^{\frac{k-1}{k}} \epsilon \Leftrightarrow \text{מתקיים}$$

3. מקרה $l < 0$: נרשום $a_n = \frac{r}{s}$ $r, s \in \mathbb{N}$

$$a_n^r \rightarrow l^r$$

$$a_n^q = (a_n^r)^{\frac{1}{s}} \rightarrow (l^r)^{\frac{1}{s}} = l^q$$

$$a_n^q \rightarrow l^q$$

מקרה 2: $q < 0$, אז מקרה 1 מתקיים

$$a_n^{-q} \rightarrow l^{-q} \Rightarrow \frac{1}{a_n^q} \rightarrow \frac{1}{l^q} = l^{-q}$$