

7.1.16

משפט

היה $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. אז
 $l_a = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ $l_b = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ קיימים ויחידים

הוכחה:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & a < x < b \\ l_b & x = b \\ l_a & x = a \end{cases} \Rightarrow \text{נניח קיימים } l_a, l_b \text{ נכון}$$

F פונקציה ב $[a, b]$, אז קיטור רציף ב $[a, b]$.
 במיוחד רציף ב (a, b) .

$\Leftarrow$ נניח f רציף. נניח בלתי רציף אז השוויון הפך לאי-קיום.

בהיפוך אם קיים $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ אז יש זוגות $x_n, y_n \in (a, b)$ כזו $x_n \rightarrow b^-$ ו $y_n \rightarrow b^-$ ש

$$\begin{cases} x_n, y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \\ f(x_n) \rightarrow L_1 \\ f(y_n) \rightarrow L_2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2$$

אז $x_n - y_n \rightarrow b - b = 0$ עבור $\varepsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{3}$ נכון δ נמצאים:

עקב $|x_n - y_n| < \delta$ ו N קיים $|f(x_n) - L_1| < \varepsilon$ ו $|f(y_n) - L_2| < \varepsilon$

$$|f(y_n) - L_2| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} f(x_n) &< \varepsilon + L_1 \\ f(y_n) &> L_2 - \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y_n) - f(x_n) &\geq L_2 - \varepsilon - \varepsilon - L_1 = \\ &= L_2 - L_1 - 2\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

בסותרת את הרצף.

לכן קיימים ויחידים $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

משפט

נניח f, g פונקציות ב x_0 . אז $f \cdot g$ נגזרת ב x_0 ונגזרתה

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

הוכחה

$$\frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= g(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0}$$

$$g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

↑
מחצית
מחצית

הערה

1. x_0 נקראת נק' מקסימום מקומי של f אם $f(x) \leq f(x_0)$ לכל x מתקיים.

$$(2) \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \text{-- " --} \quad \text{מינימום}$$

משפט (רול)

תהי f פונקציה ב (a, b) . אם $x_0 \in (a, b)$ נק' מקסימום מקומי או מינימום מקומי, מתקיים $0 = f'(x_0)$.

משפט (רול)

תהי f רציפה ב $[a, b]$ ופונקציה ב (a, b) . אם $f(a) = f(b)$ אז יש $c \in (a, b)$ כך ש $f'(c) = 0$.

משפט (לאינרץ)

תהי f רציפה ב $[a, b]$ ופונקציה ב (a, b) אז יש $c \in (a, b)$ כך ש $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

משפט (היחידות)

תהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ו f פונקציה ב I . אם $f' \equiv 0$ אז f קבועה.

הוכחה

נתון $x < y$ כלשהם ב-I. אם f איננה קבוצה $x < y$ ו- $x < c < y$ כך ש-

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) = 0 \Rightarrow f(y) = f(x)$$

הוכחה

אם $f' = g'$ אז $f = g + c$ כלשהו c קבוע.

הוכחה

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

מתקיים

אכן $f - g$ קבועה.

תרגיל

נתון $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נניח f' קבועה, אז f פולינום ממעלה ≥ 1 .

פתרון

$$(f(x) - cx)' = f'(x) - c \equiv 0 \quad \text{נניח } c \equiv f' \text{ מתקיים}$$

אכן $f(x) - cx$ קבועה, כלומר קיים d כך ש- $f(x) = cx + d$.

תרגיל

נתון f פונקציה פשוטה ב- (a, b) . יהיו $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$.
כך ש- $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$. הרי אז קיים $c \in (a, b)$ ש- $f'(c) = 0$.

פתרון

$$f'(y_1) = f'(y_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{אם } y_1 \in (x_1, x_2) \text{ אז } f'(y_1) = 0 \\ \text{אם } y_2 \in (x_2, x_3) \text{ אז } f'(y_2) = 0 \\ \text{אם } y_1 \in (x_1, x_2) \text{ אז } f'(y_1) = 0 \end{array} \right.$$

הוכחה

אם f פונקציה פשוטה בקטע (a, b) ו- f' קבועה, אז f פולינום ממעלה ≥ 1 .

$$f^{(n)}(c) = 0 \quad \text{כך ש-}$$

הוכחה

האינדוקציה.

תרגיל

הוכיחו ש- $5 = x^3 + 7x^3 - 5$ יש פתרון אחד בלבד.

פתרון

נשמן . $p(x) = x^3 + 7x^2 - 5$. נשים אל $p(0) = -5 < 0$ ו

$p(1) = 3 > 0$

אז אל ותר הבינים ו $0 < c < 1$ ו $p(c) = 0$ ו כך

נשים אל שלב $x < 0$ מתקיים $p(x) < 0$

נניח בלילה ו $0 < d < c$ כך $p(d) = 0$ ו

גזור $p'(x) = 13x^2 + 14x$

אלי הו' ו' $d < z < c$ (או $c < z < d$) כך $p'(z) = 0$ ו

אבל $p'(x) > 0$ אל $x > 0$. סמימ

גרע

הוכיחו אל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|\arctg(x) - \arctg(y)| \leq |x - y|$

פתרון

מתקיים $\arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

אלי אלרג' , סבר $x < y$ ו' $x < c < y$ כך ו

$\frac{\arctg(y) - \arctg(x)}{y - x} = \arctg'(c) = \frac{1}{1+c^2}$

$|\arctg(y) - \arctg(x)| = |y - x| \cdot \frac{1}{1+c^2} \leq |y - x|$

הצבה

יהי I בקטס ויהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. נאמר f מקימ גלי איפול

בקטס I , אז קיים M כך אל $x, y \in I$ מתקיים

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$

לדג

f איפול ו I ו f מוג' ו I ו

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. אז $|x - y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| \leq$

$\leq M|x - y| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

לדג

יהי f גלימ בקטס I . נניח f' מוג' ו I אז f רג' ו I .

הוכחה

נניח f חסומה ו' M נראה f אישור.

נקח $y \neq x$ כלשהם ב- I , לפי אי-רצף, קיים c כזה ש-

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x| \leq M \cdot |y - x|$$

המסקנה היא אי-רצף ולכן f אישור.

משפט

תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה. נניח $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$, הרי f

אי-רצופה ב- $(0, \infty)$.

פתרון

נניח $n \in \mathbb{N}$ נקבע M_n כך שלכל $x \geq M_n$ מתקיים $f'(x) \geq n$.

$$\begin{cases} x_n = M_n \\ y_n = M_n + \frac{1}{n} \end{cases} \quad \text{נסמן}$$

$$|y_n - x_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{מתקיים}$$

כל $x_n < c_n < y_n$ קיים c_n כך ש-

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(c_n)$$

$$|f(y_n) - f(x_n)| = |y_n - x_n| |f'(c_n)| = \frac{|f'(c_n)|}{n} \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

$\uparrow$
כי $M_n < c_n$

לכן מסתבר $\varepsilon = 1$ אין δ מתאים.

אם תחם הדבר נכון כאשר $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \infty$? לא.

אפשר יהיה $f(x) = \sqrt{x}$ הפונקציה ב- $(0, \infty)$.

לפי קלוסי, f רציפה ב- $[0, 1]$.

הערה: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ חסומה ב- $(1, \infty)$ לכן f רציפה ב- $[1, \infty)$.

כלומר מתקבל δ היבוקר קטנים, f רציפה ב- $[0, \infty)$.

תרגיל

תהי f פונקציה ב $(0, \infty)$ ונגיד $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

הראו $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

פתרון

יהי $\varepsilon > 0$

ניקח N_1 כך של $x > N_1$ מתקיים $|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

ניקח N_2 כך של $x > N_2$ מתקיים $\left| \frac{f(N_1)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

נסמן $N = \max\{N_1, N_2\}$ אז $N_1 < C_0 < x$ ו $x > N$ אז

$$\frac{f(x) - f(N_1)}{x - N_1} = f'(C_1) \quad \text{ע"פ}$$

$$f(x) = f(N_1) + (x - N_1)f'(C_1)$$

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| \frac{f(N_1)}{x} + \frac{x - N_1}{x} \cdot f'(C_1) \right| \leq \underbrace{\left| \frac{f(N_1)}{x} \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f'(C_1)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\left| \frac{x - N_1}{x} \right|}_{< 1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $x > N_2$ כי $C_1 > N_1$ כי

שאלה

תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרע.

(1) אם $f' \geq 0$ ב (a, b) שרע f מושה (a, b)

(2) אם $f' > 0$ ב (a, b) שרע f מושה עולה (a, b)

(3) " " $f' \leq 0$ " " " " " "

(4) " " $f' < 0$ " " " " " "

תרגיל

הוכיחו $\ln x < \frac{x}{e}$ ב $0 < x \neq e$

פתרון

$$f'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{x}{e} - \ln x$$

אכן f מושה $(0, e)$ ו (e, ∞) מושה
 ו f מושה (e, ∞) ו f מושה $(0, e)$

$$f(x) \begin{cases} < 0 & x < e \\ = 0 & x = e \\ > 0 & x > e \end{cases}$$

* f רציפה ולכן יורדת מעל a ב $(0, e]$ וסופה מעל ב $[e, \infty)$.
 * יהי $e < x < y$ ניקח $e < y < x$ נקרא $f(y) < f(x)$
 ולכן $f(z) < f(y)$ מתקיים $e < z < y$.
 $f(e) = \lim_{x \rightarrow e} f(x) \leq f(y) < f(x)$

אכן $f(x) > f(e) = 0$ מתקיים $x > e$
 ואם $f(x) > f(e) = 0$ מתקיים $x < e$

משפט

תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בנק' $x_0 \in (a, b)$
 ונגד $f'(x_0) = 0$ ונניח

(1) אם $f''(x_0) < 0$ אז x_0 נק' מקס' מקומי.

(2) אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 נק' מינ' מקומי.

דוגמה

נמצא נק' מקס' / מינ' מקומי לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$

פתרון

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2} = 0$$

$$\ln x = 0 \quad \ln x = 2$$

$$x = 1$$

$$x = e^2$$

אם סדרה, מקס' או מינ' מקומי יכול להתקבל רק ב $x = 1, e^2$.

נציב שוב ונקבל: $f''(x) = \dots = \frac{2 - 6 \ln x + 2 \ln^2 x}{x^3}$

$$f''(1) = 2 > 0$$

אכן 1 מינ' מקומי ו e^2 מקס' מקומי.

$$f''(e^2) = \frac{-2}{e^6} < 0$$