

31.12.15

רציפות במידה שווה

השערה: יהי I קטע ויהי $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

נאמר של f רציפה במידה שווה ב- I אם:

אם $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך של $x, y \in I$ מתקיים:

$$|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

הערה: רציפות במידה שווה ב- I $\leftarrow$ רציפות ב- I

משפט (קטורה)

אם f רציפה בקטע סגור אז היא רציפה בנקודה כל.

משפט

יהי f רציפה ב- (a, b) , $-\infty < a < b < +\infty$, $s.c.$

f רציפה בנקודה $(a, b) \iff$ קיימים גבולות ימניים ושמאליים:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$$

דוגמה

קבעו את הגבולות הנכונים הבאים בנקודה הנדרשת:

$$x \in (0, 1), f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 2 \quad x \in (0, 1), f(x) = e^x \quad 1.$$

$$x \in (1, \infty), f(x) = \ln x \quad 4. \quad x \in (0, \infty), f(x) = e^x \quad 3.$$

סדרה

$$1. \text{ כן, } e^x \text{ רציפה ב- } (0, 1) \text{ וקיימים הגבולות } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = e$$

$$2. \text{ לא, קיים הגבול } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$3. \text{ לא, נמצא ש } x_n, y_n \text{ סדרה } |x_n - y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ - ע$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq c$$

$$\begin{aligned} & \text{נבחר } x_n = \ln(n) \quad y_n = \ln(n+1) \\ & |y_n - x_n| = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\uparrow \\ \text{רציפות ב-} \ln}} \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$$|f(y_n) - f(x_n)| = |n+1 - n| = 1 \quad \text{אכן}$$

דבור $\epsilon = 1$ אל קיים $\delta > 0$ נקיים:

אם $|x_n - y_n| < \delta$ ו n קר $\delta > 0$ ו

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$$

4. כן, יחס $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ו $\delta > 0$ קר $\epsilon = 1$ ו

כך $|\frac{\ln(1+t)}{t} - 1| < 1$ ו $0 < |t| < \delta$ ו

$\frac{\ln(1+t)}{t} < 2 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \ln(1+t) < 2t$ ו

נניח $1 < y < x$, $|x-y| < \delta$, $x, y \in (1, \infty)$ ו
 $|\ln x - \ln y| = \ln \frac{x}{y} = \ln \left(1 + \frac{x-y}{y} \right) \leq 2 \frac{x-y}{y} < 2|x-y| < \epsilon$ ו

$\delta = \min(\delta_1, \frac{\epsilon}{2})$ ו

אם $|x-y| < \delta$ ו $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ו

הערה

היה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כזו. נניח $f(0) = 0$ ו
 אף $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ ו x, y מסוימים, הרי
 הפונקציה f היא גבולית ב-0.

הוכחה

יהי $\epsilon > 0$. נחזיק f כזו $\delta > 0$ קר אם $|t| < \delta$ ו $|f(t)| < \epsilon$ ו

אם δ מספיק קטן. אף $x \in \mathbb{R}$ ו $|t| < \delta$ ו $f(x+t) \leq f(x) + f(t)$ ו

• $f(x) = f(x+t-t) \leq f(x+t) + f(-t) \Rightarrow f(x) - f(x+t) \leq f(-t) < \epsilon$ ו

• $f(x+t) \leq f(x) + f(t) \Rightarrow f(x+t) - f(x) \leq f(t) < \epsilon$ ו

$|f(x+t) - f(x)| < \epsilon$ ו $|t| < \delta$ ו

(כך $f(x+t) = f(y)$ ו $t = y-x$ ו $|y-x| < \delta$ ו)

למשל
 תהי f תיחסה בונה בקטעים $(a, b], [b, c)$ ("אין $a = -\infty$ או $c = +\infty$)
 וכל f תיחסה בונה ב (a, c) .

סתם
 יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta_1 > 0$ כזה שכל $x, y \in (a, b]$ אם $|x - y| < \delta_1$
 אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.
 כמו כן, קיים δ_2 כזה שכל $x, y \in [b, c)$

אם $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$
 יהיו $x, y \in (a, c)$ כך שכל $|x - y| < \delta$

אז במקרים:
 (1) $x, y \in (a, b]$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

(2) $x, y \in [b, c)$ אז $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

(3) נניח $a < x \leq b \leq y < c$ אז
 $|x - b| \leq |x - y| < \delta_1$ וכל $|y - b| \leq |x - y| < \delta_2$

אזכר
 $|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(b) + f(b) - f(x)| \leq$
 $\leq |f(y) - f(b)| + |f(x) - f(b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

המשפט
 תהי $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ תיחסה ונניח שקיים גבול (המשפט)
 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ אז f רבנית.

הוכחה
 יהי $\varepsilon > 0$. יש N כזה שכל $x \geq N$ אז $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4}$
 אז כל $x, y \geq N$ אז $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

אם f אינה קבועה, אז f תיחסה בקטע $[0, M]$ אם $\delta > 0$ כך שכל
 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ אז $|x - y| < \delta$ וכל $x, y \in [0, M]$

משפט 10.1 - δ נקבע על ידי ϵ .

יהיו $0 < \epsilon < \delta$, $x, y \in [0, M]$.

אם $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ אז $x, y \geq M$.

אם $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ אז $0 \leq x, y \leq M$.

נניח $0 \leq x \leq M \leq y$ אז $|x - M| \leq |x - y| < \delta$.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M)| + |f(y) - f(M)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

משפט

הגדרה: תהי f פונקציה במסגרת x_0 (כולל), נאמר כי

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

בנקודה x_0 נאמר כי $f'(x_0)$ קיים.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

* כיוון x_0^- עולה

* נאמר כי f פונקציה בקטע (a, b) אם f פונקציה בקטע $[a, b]$.

* נאמר כי f פונקציה בקטע $[a, b]$ אם f פונקציה בקטע (a, b) וקיימת נגזרת ב a .

הנגזרת ב a^+ , b^- .

משפט: f פונקציה ב x_0 $\iff f$ פונקציה ב x_0 .

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$f(x) = (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

||

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

לדג (6.1) גזירה

נניח f, g גזירות ב x . אז

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \quad (1)$$

$$(cf)'(x) = cf'(x) \quad c \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \quad (3)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (4)$$

לדג (6.2) חשבוניות

נניח g גזירה ב x ו f גזירה ב $g(x)$. אז

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (5)$$

גזירות בסיסיות

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (2)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (3)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (4)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (5)$$

דוגמה

נמצא את הנגזרת של $f(x) = x|x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

פתרון

(1) עבור $x \neq 0$ יש שני מקרים: $x > 0$ ו $x < 0$.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \quad x > 0$$

$$f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \quad x < 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot |h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 \quad x = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(x) = 2|x|$$

כלומר

$$\therefore x > 0 \quad \text{and} \quad (2)$$

$\therefore x = 0$ ✓

02. misal 9

حی

(2nd attempt) $f(x) = \sin(x)^{\cos x}$ is messy to do

170

10127

0700N

$$\bullet (\cos x \cdot \ln(\sin x))' = -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$\begin{aligned} \cdot (e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)})' &= e^{\cos x \cdot \ln(\sin x)} \cdot (-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}) = \\ &= (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{\tan x} - \sin x \cdot \ln(\sin x) \right) \end{aligned}$$

206

$\mathbb{R}$ 2 מיני פונקציה
 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

הפועקציה

$$\left(\begin{array}{c} \text{L'Hôpital's rule} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ f(0) = f \end{array} \right) \quad f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 f(x) dx$$

Q2

6) א' סביבה זה $\neq$ פונקציה אטנטרית וכן $\neq$ פונקציה אטנטרית

$$: Y = 0.2 \quad \text{at } C_1$$

1 and

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \quad \text{e } p_n \text{ é pol. de grau } n \text{ em } x$$

$$. X \neq 0 \quad \text{für}$$

סעיף 17 - סמל

הומה

$$f^{(0)}(x) = \rho_0\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \quad \rho_0(t) = 1 \quad n=0 \quad \text{ראשון}$$

הנני מצהיר כי הנני מוכן להישבע על ידי אלוהים כי

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' =$$

512

$$= (p_n(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}})' = p_n'(\frac{1}{x}) \cdot -\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} +$$

$$+ p_n(\frac{1}{x}) \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} =$$

$$= \left(\frac{2}{x} p_n(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2} p_n'(\frac{1}{x}) \right) f(x)$$

||

$$p_{n+1}(t) = 2t^3 p_n(t) - t^2 p_n'(t)$$

1/101

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

2 מדרג
Q סדר 6
הוכחה
מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \left(\frac{1}{x} \right)^n e^{-\frac{1}{x^2}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^n} e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\frac{n}{2}}}{e^t} = 0$$

מספר

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^n \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

אכן

עבר סדרים בלי, ונכנס מתחילת הצורה.

נחזור להוכחה טענה 3

באינדוקציה על n: נניח $f \in C^\infty$ ו- $f^{(n)}(0) = 0$, אז $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n, כלומר ההצגה $f^{(n)}(0) = 0$.

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot p_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h^2}} = 0$$

אם $Q(t) = t^n p_n(t)$

אם $n=1$ והוכחה היא ברורה

