

24.12.15

הצגה

1. תהי $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ויהי $x_0 \in (a, b)$ נקודה פנימית.
אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ אז נאמר ש- f רציפה ב- x_0 .

2. נאמר ש- f רציפה בקטע (a, b) אם לכל $x_0 \in (a, b)$ f רציפה ב- x_0 .

3. f רציפה בקטע $[a, b]$ אם f רציפה ב- (a, b) וכן
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ אז f רציפה ב- $[a, b]$.

הצגה

נניח $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- x_0 .
אם $f(x_0) > 0$ אז קיים $\delta > 0$ כזה ש- $f(x) > 0$ לכל x בסביבת x_0 .

הוכחה: כי יש סביבה של x_0 שבה לכל x מתקיים $f(x) > 0$.

כתיבה

נרציף f בנקודה x_0 .
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

נבחר $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$. קיים $\delta > 0$ כזה ש- $f(x) > \varepsilon$ לכל x בסביבת x_0 .

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

אז f רציפה ב- x_0 .

משקלה: אם $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפות ב- x_0 אז $f(x) > g(x)$ בסביבת x_0 .

קיים סביבה של x_0 שבה $f(x) > g(x)$.

הוכחה: נסמן $h = f - g$. h רציפה ב- x_0 (סכום של רציפות).

מתקיים $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$ ולפי סביבה של x_0 נקיים $h(x) > 0$.

לכן $f(x) > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - g(x) = h(x) > 0$ בסביבת x_0 .

תחילת:

תהיה $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וזכור. נניח $q \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(q) = g(q)$

הוא $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$

פתרון:

קבוצת x כלשהי. נראה $f(x) = g(x)$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(q_n) = g(x)$$

$\nearrow$ $q_n \in \mathbb{Q}$ $\nearrow$ q

הצגה:

תהי f פונקציה ודעי x_0 נקודה שבה f איננה צוברת.

נראה x_0 היא נק' אי ציבור

$$\left(\frac{x^2 - x}{x - 1} \right) \quad f(x_0) \neq l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

1. סליקה - אם קיים הסבול

2. מסוג ראשון - אם קיימים הסבולות הדדיים $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

3. מסוג שני - אחרת $\left(\frac{1}{x}, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

תחילת:

נניח $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וזכור. נניח $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

2. $f: [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$$

פתרון:

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^0 - n^0}{n^0 + n^0} = 0 \quad : \underline{x=0} \quad \text{א"כ} \quad 1.$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^{-2x}}{1 + n^{-2x}} = 1 \quad : \underline{x > 0} \quad \text{א"כ}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2x} - 1}{n^{2x} + 1} = -1 \quad : \underline{x < 0} \quad \text{א"כ}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{נקבל}$$

(אכיפות)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$\Rightarrow$ אם יש נק' א' רציפה $x \neq 0$ ~~א"כ~~

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

אז $x=0$ איננו נק' רציפה.

משפט * יהי f, g פונקציות, $x_0 \in \mathbb{R}$
 נניח g רציפה. אם קיימת סביבה x_0 שבה $f=g$ אז גם f רציפה ב- x_0 .
הוכחה: ניקח סביבה $(x-M, x+M)$ שבה $f=g$.
 נהיה $x_0 \neq x_n$ והיא נלקחת מסביבת x_0 $x_n \in (x-M, x+M)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0) = f(x_0)$$
 □

2. עבור $x=0$ ניקח $x_n \neq 0$ אז

$$|f(x_n)| \leq |x_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x_n)| \rightarrow 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0$$

הרעיון: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ אז f רציפה ב-0.

לכור $x \neq 0$ ניקח x_n שואף אל x קיימת סביבה x_n (א"כ רציפה מסוג 2).

$$x < b_n, a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

ניקח סדרה

$$a_n \in \mathbb{Q} \quad b_n \notin \mathbb{Q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$$

SLC

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

הסתעף לא קיים היחס $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ במובן אופן
מיאם לא קיים $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

3. נשים לב שסדרה $x \in [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f(x) = n-1 + (x-n+1)^{n-1}$$

SLC זהה לסדרה אומלרם כל קטע מהצורה $(n-1, n)$

אכן, רצפה של כל כן, סדרה $n > 1$

$$\lim_{x \rightarrow (n-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (n-1)^+} [n-1 + (x-n+1)^{n-1}] =$$

$$= n-1 + (n-1-n+1)^{n-1} = n-1$$

הסתעף
סדרה
מתקיים

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} [n-1 + (x-n+1)^{n-1}] = n-1 + (n-n+1)^{n-1} = n-1 + 1 = n$$

$$\lim_{x \rightarrow n} f(x) = n$$

הסתעף לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$f(n) = n + (n-n)^n = n$$

ולכן

כל $x \in [\frac{1}{2}, \infty)$ כל הסדרה f קפ

משפט (וירטל) (Weierstrass)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. אז

1. f חסומה ב $[a, b]$.
2. f מקבלת מקסימום ומינימום ב $[a, b]$.

תרגיל:

תהי f רציפה ב $(-\infty, \infty)$. נניח שקיים מספר $l = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

אז: 1. הוכיחו של f חסומה ב $[-M, M]$.

2. האם בהכרח f מקבלת מקס' או מיני?

פתרון: 1. מתקן. קיים N כך של $x > N$ מתקיים $|f(x) - l| < 1$.

לפי וירטל, f חסומה, (אז M בקצת).
הסדר $[0, N]$.

$$l-1 < f(x) < l+1$$

$$A = \max\{M, l+1\}$$

(במ)

$$B = \min\{-M, l-1\}$$

$$B \leq f(x) \leq A \quad x \in [0, \infty) \text{ מתקיים}$$

2. ח"ם להיות מיני או מקס' חסומה ב $[-M, M]$ חסומה

ל תרגיל בסטודנט (לר)

הוכחה:

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה וניחה l .
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$
 כאשר $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, הריא f מתקרבת לקצה או $-\infty$ ב $\mathbb{R}$.

פירוט:

ראוי, וניחה $l = +\infty$. נסתכן $M = f(x_0)$. קיים N_1 כך של $x_1 > N_1$ מתקיים $f(x_1) > M$ (כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$). קיים N_2 כך של $x_2 < N_2$ מתקיים $f(x_2) > M$ (כי $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$).

אם וירא $l = -\infty$ קיים מינימום f ב $[N_2, N_1]$. נניח שהמינימום מתקבל בנק x_0 . אם $x \in [N_2, N_1]$ מכאן x_0 מתקייב $f(x) > f(x_0)$. אחרת, $x < N_2$ או $x > N_1$, בניה $f(x) > M \geq f(x_0)$ כי $0 \in [N_2, N_1]$.
 ולכן מתקיים $f(x) > f(x_0)$.
 אכן בהכרח מתקבל מינימום ב $\mathbb{R}$.

כאשר $l = -\infty$, אחרת גבר אל הפסס (נניח מקסימום ב $\mathbb{R}$).

$l \in \mathbb{R}$: בהי' נכיל אלה $l = 0$ אחרת נסתכן $g(x) = f(x) - l$ ונא $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$ וכן מקסימינ' g היא גם נק' מקסימינ' f .

אם אל x מתקיים $f(x) = 0$ אל G נק' היא מינימום ומקסימום.
 נניח קיים x כך $f(x) \neq 0$. בהי' נניח $f(x_0) > 0$ ונניח מקסי' (אחרת $f(x_0) < 0$ ונניח מיני').
 נסבור $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ קיים N_1 כך של $x > N_1$ מתקיים $f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$. כנו K קיים N_2 כך של $x < -N_2$ מתקיים $f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$.
 מתקיים $x \in [-N_2, N_1]$ נאם אל מתקיים $f(x) < \frac{f(x_0)}{2}$.

נסתכן $N = \max\{N_1, N_2\}$. אפי וירא l בקס $[-N, N]$.
 נק' מקסי' α . אם $x \in [-N, N]$ אל $f(x) \leq f(\alpha)$ מכאן α .
 אחרת $\left(\begin{smallmatrix} x < -N \\ x > N \end{smallmatrix} \right)$, $f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < f(x_0) \leq f(\alpha)$ כי x_0 היא מקסי'.

משפט הביניים

$$y_1 = f(a)$$

$$y_2 = f(b)$$

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה. נסמן

$$y_1 < y_2$$

אז לכל $y_1 < y < y_2$, קיים $a < c < b$ כך ש $f(c) = y$.

ניסוח שקול - אם f רציפה אז התמונה של f היא קטע.

הערה: במספר ממשי וירטואלי, התמונה של קטע סגור היא קטע סגור.

לשם קב: יהי $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ פולינום ממעלה n בזמן.

אז P יש שורש ב $\mathbb{R}$.

מסקנה: בהיכ נניח $a_n > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a_n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$$

לכן קיים b כך ש $P(b) > 0$ וקיים $a < b$

כך ש $P(a) < 0$.

אם נשקל ערך הביניים קיים $a < c < b$ ש $P(c) = 0$.

דוגמה: הריא יש שני שורשים $2^x - 5x = 0$.

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -3 \end{cases}$$

נסמן $f(x) = 2^x - 5x$. מתקיים

f פונקציה אלמנטרית ולכן רציפה.

אז יש $0 < c < 1$ כך ש $f(c) = 0$.

תרגיל: תהי $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ רציפה.

הראו שקיים x_0 כך ש $f(x_0) = x_0$.

(x_0 נקרא נק' שבתה f)

פתרון: נגדיר $g(x) = f(x) - x$.

אז g רציפה (כי f רציפה) ומקיימת $g(0) = f(0) \stackrel{(1)}{\geq} 0$

$$g(1) = f(1) - 1 \stackrel{(2)}{\leq} 0$$

אם יש שוויון ב (1) או ב (2) סיימנו. $\left(\begin{matrix} f(0) = 0 & \text{כי} \\ f(1) = 1 & \text{אז} \end{matrix} \right)$

אכן נניח שיש אז שוויון חזק בשניהם.

ואם אף נשאל ערך הביניים, יש $0 < c < 1$ כך ש-

$$g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$$