19/4/15

אנליזה הרמונית

W5D1

בשבוע שעבר: קריטריון ל- equidist. של Weil.

משפט: התנאים הבאים שקולים, לכל סדרה $(a_k)\in\mathbb{R}$, $I_n(\varphi)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k)$

$I(\varphi)=\lim_{n\to\infty}I_n(\varphi)$ אם קיים.

1. a_k ~~equidist~~

לכל $[a,b]\subseteq[-\pi,\pi]$, $$I(\chi_{[a,b]})=\frac{b-a}{2\pi}$$

2. $I(e^{ilt})=0$ לכל $l\neq0$ שלם.

3. לכל φ רציפה, $I(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt$.

הוכחה (תזכורת) הגדרנו $\mathcal{E}_A$ מרחב של $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ שעבורם $I(\varphi)$ קיים. ראינו שזה מרחב לינארי וסגור תחת התכנסות במ"ש. אז $1\to3$ כי אפשר לקרב במ"ש כל פונקציה רציפה ע"י פונקציות רציפות. $3\to2$ טריוויאלי (אקספ' פונקציה רציפה).

$2\to3$ כי פולינומים טריגונומטריים צפופים בקבוצת הפונקציות הרציפות, לפי משפט ויירשטראס (נשים לב שבשביל לקבל גם מצומד $\overline{e^{ilt}}$ אפשר להשתמש ב- $I_n(\overline{e^{ilt}})=I_n(e^{-ilt})$). למה $3\to1$? I פונקציונל מונוטוני לפי הגדרה, ואפשר לקרב  בקירוב טוב כרצוננו.

משפט Herglotz

$(a_n)\in\mathbb{C}$ תיקרא **מוגדרת חיובית** אם לכל סדרה סופית $(z_n)\in\mathbb{C}$ מתקיים $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{n-m}z_n\overline{z_m}\geq0$. פונקציונל $\varphi\in C^*(\mathbb{T})$ נקרא __אי-שלילי__ אם לכל $f\geq0$ מתקיים $\varphi(f)\geq0$. לכל פונקציונל $\varphi\in C^*(\mathbb{T})$ נוכל גם להגדיר מקדמי פורייה - $\hat{\varphi}(n)=\varphi(e^{int})$

משפט $(a_n)\in\mathbb{C}$ מוגדרת חיובית $\longleftrightarrow$ קיים (בדיוק אחד) פונקציונל אי-שלילי φ עם $\hat{\varphi}(n)=a_n$.

הוכחה כיוון $\longrightarrow$ די ברור: אם φ אי-שלילי אז

$$\sum_{n,m}\hat{\varphi}(n-m)z_n\overline{z_m}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\varphi(e^{i(n-m)t})z_n\overline{z_m}=\varphi\Big(\sum_{n,m}z_n\overline{z_m}e^{int}e^{-imt}\Big)=\varphi\Big(\Big|\sum_m z_m e^{-imt}\Big|^2\Big)\geq0$$

כיוון קשה זה $\longleftarrow$ כמובן. נתחיל מלהגדיר φ על פולינומים טריגונומטריים. ברור שאם $P=\sum_n c_n e^{int}$, אז $\varphi(P)=\sum_n c_n a_n$.

מספיק להוכיח שזה פונקציונל לינארי __חסום__ על פולינומים טריגונומטריים, ושהוא אי-שלילי. כדי לבדוק אי-שליליות נשתמש בלמה של פייר

למה אם $P\in T_N$ אי-שלילי, אז הוא מהצורה $P=|Q|^2$ לאיזהו $Q\in T_{N/2}$.

הוכחה נסמן $P=\sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikt}$. ניקח $f(z)=\sum_{k=-N}^{N} a_k z^k$, פונקציה מרומורפית אי-שלילית על מעגל היחידה. מספיק להוכיח כאשר היא ממש חיובית שם (למה?). בפרט $f(z)=\overline{f(z)}=\sum_{k=-N}^{N}\frac{\bar a_k}{z^k}=\bar f(\frac{1}{z})$ פונקציה מרומורפית. לפי יחידות, נובע שאלו פונקציות שוות בכל מקום, $f(z)=\bar f(1/z)$. נתבונן ב-$z^N f(z)$ פולינום. לפי המשפט היסודי של האלגברה אפשר להציג אותו כ-$c\prod_{k=1}^{2N}(z-\alpha_k)$, ולכן $f(z)=z^{-N}c\prod_{k=1}^{2N}(z-\alpha_k)$. לכן $\bar f(1/z)=z^{N}\bar c\prod_{k=1}^{2N}(\frac{1}{z}-\bar\alpha_k)$, או $\frac{1}{z^N}c_1\prod_{k=1}^{2N}(z-\frac{1}{\bar\alpha_k})$. לכן $\{\alpha_k\}=\{1/\bar\alpha_k\}$ כ-multisets. אין שורשים על מעגל יחידה לפי הנחה, אז נחלק לשורשים בפנים של מעגל יחידה ובחוץ. נוכל לסדר בזוגות $\alpha_1=1/\bar\alpha_2,\ \alpha_3=1/\bar\alpha_4,\ \dots,\ \alpha_{2N-1}=1/\bar\alpha_{2N}$. לכן $f(z)=\frac{c}{z^N}\prod_{k=1}^{N}(z-\beta_k)(\frac{1}{z}-\frac{1}{z\bar\beta_k})$, וגם $(z-\beta_k)(1-\frac{1}{z\bar\beta_k})=\frac{-1}{\bar\beta_k}|z-\beta_k|^2$ ולכן אם $P=c_2\prod_{k=1}^{N}|e^{ikt}-\beta_k|^2$ ולכן $c_2\geq 0$. לכן זה עובד עם

$$Q=\sqrt{c_2}\prod_{k=1}^{N}|e^{ikt}-\beta_k|$$