אנליזה הרמונית

בשלב הראשון נסתכל במפורש פונקציה רציפה שאורך פורייה שלה מתבדר ב-0.

עכשיו נסביר באופן כללי איך למצוא דוגמאות כאלו:

למה אם $g\in L_1(\mathbb{T})$ אז $\|g\|_1=\sup_{P\in\mathcal{T},\|P\|\le 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)P(t)dt$

הוכחה בכיוון אחד טריוויאלי: לכל $\|P\|\le 1$ $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)P(t)dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)||P(t)|dt\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|dt=\|g\|_1$

בכיוון שני, נוכל לקרב את g בנורמת L_1 ע"י פולינומים טריגונומטריים $g_n=g*\sigma_n$. נגדיר $h=\operatorname{sign} g$ אז $\|g\|_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_n(t)h(t)dt$

אינטגרל בצבוע נה $\int(g*\sigma_n)\cdot h=((g*\sigma_n)*h)(0)$

$(g*(\sigma_n*h))(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\underbrace{(\sigma_n*h)(t)}_{\frac{n}{L}}dt$

$\|\sigma_n*h\|_{C(\mathbb{T})}\le\|h\|_{C(\mathbb{T})}\le 1$

במילים אחרות - הפונקציונל $\varphi_g(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)f(t)dt$ ב-$C^*(\mathbb{T})$ הוא מטריצה $\|g\|_1$.

משפט $L_N=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_N(t)|=\|D_N\|$ שואפים לאינסוף כמו $c\cdot\log N$

הוכחה יש כיוון קבועים נה $\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}\right|dt$ אז לכל הבחירות $\int_0^{\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{t}dt$

$\int_0^{\pi(N+\frac{1}{2})}\frac{|\sin y|}{y}>c\ln N$ אז

לכן, לכל N קיים $P\in\mathcal{T}$, $\|P\|_\infty\le 1$ עם $\sum_{n=-N}^{N}\hat{P}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)P(t)>c\ln N$.

למשפט כללי יותר: משפט בנך-שטיינהאוס אומר שיש לכל סדרת פונקציונלים לא חסומה $\|x\|=1$ עם $\sup|\varphi_n(x)|$ אינסופי.

סדרות במידה אחידה [Equidistributed]

סדרה $(a_n)\subseteq\mathbb{T}$ היא Equid. אם $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\{k\le N\mid a_k\in[a,b]\}=\frac{b-a}{2\pi}$

לכל $-\pi\le a\le b\le\pi$.

משפט (Weil) נה שקול לכך שלכל $n>0$, $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{ina_k}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$.

דוגמה - $n\alpha \bmod 2\pi$ ל- $\alpha\notin\mathbb{Q}$, לפי הקריטרון של וייל.

הוכחה נוכיח דבר נוסף - שנראים שקולים לכך שלכל $f\in C(\mathbb{T})$ $I_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(a_k)\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$

משפחה של פונקציות שמקיימות את נה ת"מ סגור של $C(\mathbb{T})$. לכן מספיק שנה יהיה נכון על בסיס של משפחה צפופה - e^{int}, $\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ ...