אנליזה הרמונית

תזכורת: בעיית דיריכלה - למצוא $u\in C^\infty(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$ הרמונית $\Delta u=0$ עם תנאי שפה נתונים, $u|_{\partial\mathbb{D}}=f$.

משפט: לכל $f\in C(\mathbb{T})$ קיים ויחיד פתרון.

הוכחה: מפונקציות מרוכבות אנחנו יודעים שיש תכונת ערך בינוני: $u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x+\varepsilon e^{it})dt$, $x\in\mathbb{D}$ (לחלופין, זו מסקנה ממשפט גרין מחדו"א 4). בפרט, מודולוס מקסימלי מתקבל בשפה, ולכן מיד נובע שיש יחידות (כי הפרש של 2 פתרונות זו פונקציה הרמונית שמתאפסת ב-$\partial\mathbb{D}$).

כדי לקבל קיום, פיתחנו $u(re^{it})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n r^{|n|}e^{int}$ וראינו שפתרון, אם קיים, בהכרח מקיים $c_n=\hat{f}(n)$. צ"ל שבמצב כזה אכן $u_r(t)=u(r\cdot e^{it})$ מתכנסת במ"ש ל-f כאשר $r\to1$.

נגדיר $P_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{int}$ (הטור מתכנס במ"ש ב-$|r|<1-\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$), כך ש-$u_r=P_r*f$. נמצא נוסחה מפורשת ל-P גרעין פואסון - קל פ' אפשר לחשוב עליו כסכום 2 סדרות הנדסיות, ונקבל $P_r(t)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$. נבדוק שזו יחידה אפרוקסימטיבית: $\frac{1}{2\pi}\int P_r(t)dt=\hat{P}_r(0)=1$, $P_r(t)\geq0$ ולכן $\|P_r\|_1=1$ חסום, וכאשר $\delta<|t|$, $\cos t$ רחוק מ-1 לא יותר גדול מ-$\cos\delta$, אז $P_r(t)\leq\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta+r^2}$, ולכן לכל היותר $\frac{1-r^2}{1-2r\cos\delta}\xrightarrow[r\to1]{}0$.

נשים לב שבגלל ש-P_r יחידה אפרוקסימטיבית, הוכחה מקבילה תעבוד ל-$f\in L_p(\mathbb{T})$, כאשר בשפה נקבל f: $P_r*f\xrightarrow[r\to1]{L_p}f$. מה לגבי התכנסות נקודתית? בנק' רציפות של f יש התכנסות נקודתית.

משפט: תהי k_n יח' אפרוקסימטיבית עם $\lambda_n=\sup_{\delta\leq|t|}|k_n(t)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ לכל $\delta>0$. תהי $f\in L_1(\mathbb{T})$ ו-$a\in\mathbb{T}$ נק' רציפות של f. אז $(k_n*f)(a)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(a)$.

הוכחה: ע"י מעבר לפונקציית עזר $g(t)=f(a+t)-f(a)$, מספיק להוכיח למקרה $a=f(a)=0$. כעת, $|2\pi(k_n*f)(a)|=\left|\int_{-\pi}^{\pi}k_n(t)f(t)dt\right|\leq$

$$\leq\left|\int_{|t|\leq\delta}k_n(t)f(t)dt\right|+\left|\int_{|t|>\delta}k_n(t)f(t)dt\right|\leq\sup_{|t|\leq\delta}|f(t)|\int_{-\pi}^{\pi}|k_n(t)|dt+\underbrace{\lambda_n}_{\downarrow 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

~~[crossed out]~~ כעת, לכל סגל מתקיים $\lim_{n\to\infty}|(k_n*f)(0)| \le \frac{M}{2\pi}\sup_{\delta<|t|}|f(t)|$

כאשר סגל הסופרימום שואף ל-0 (מרציפות ב-0 $f(0)=0$) ולכן

$\lim_{n\to\infty}(k_n*f)(a)=f(a)$

יתר על כן: אם $k_n(t)=k_n(-t)$ אז $(k_n*f)(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(t)f(a-t)\,dt$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(-t)f(a+t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k_n(t)\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\,dt$$

ולכן מספיק לדרוש רק רציפות של הפונקציה הזו:

$\frac{f(a+t)+f(a-t)}{2}\xrightarrow[t\to 0]{} L$ אז $(k_n*f)(a)=L$

<u>משפט</u> (פטו) מספיק לדרוש $\frac{1}{2h}\int_0^h f(a+t)+f(a-t)\,dt\to L$, אם k_n זה P_r גרעין פואסון.

[היתרון - משפט לבג אומר שהגבול קיים כמעט בכל מקום, לכל f אינטגרבילית]

יש משפט מקביל לגרעין פייר, אבל הוא דורש תנאי קצת חזק יותר.

<u>הוכחה</u> נבדוק ש- $\frac{-\sin t}{r}P_r'(t)$ יחידה אפרוקסימטיבית, ומקיימת תכונות סופרימום של משפט קודם. נעשה חשבון: $\frac{-\sin t}{r}P_r'(t)=\frac{2\sin^2 t(1-r^2)}{(1-2r\cos t+r^2)^2}\ge 0$.

כמו כן, כאשר $\delta<|t|$ מכנה מופרד מ-0 - $|k_n(t)|\le\frac{2\sin^2 t\,(1-r^2)}{(1-2\cos\delta)^2}\xrightarrow[r\to 1]{}0$.

בגלל שהיא אי שלילית, מספיק לבדוק את האינטגרל שלה ונקבל תנאי חסימות בנורמה L_1: $P_r'(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}\cdot in\cdot e^{int}$ לכן

$k_n(t)=\frac{-1}{2ir}(e^{it}-e^{-it})\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}ine^{int}$. אינטגרל זה $\hat{k}_n(0)$, כלומר

בדיוק $-\frac{1}{2ir}[ri(-1)-ri\cdot 1]=1$.