W3D3

24/3/15

אנליזה הרמונית

נחזור למשוואת החום. נחשב את $Q=\int_V u(x)dx$, כך ש- $\Delta Q = c\int (u_{t+\Delta t}(x)-u_t(x))\,dx$, והדרך שבה מתווסף חום יכולה להיות רק אם הוא נכנס ל-V דרך השפה, כאשר יש הפרש טמפרטורות. כלומר אם ∇u משיק לשפה לא יהיה מעבר חום. בהנחה שיש רכיב מאונך ל-∂V נקבל זרימת חום. השערה של ניוטון היא שהתלות (הקירוב) ליניארי, כלומר תלוי בנגזרת הנורמלית של u - $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}\cdot c_1\underbrace{\Delta S}_{\text{שטח השפה באיזור הנתון}}$, ולכן $\Delta Q = c_1\Delta t\int_{\partial V}\frac{\partial u}{\partial n}ds$.

נקבל $\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=c_0\int_V\frac{\partial}{\partial x}u\,dx = c_1\int_{\partial V}\frac{\partial u}{\partial n}ds$. באינטגרל השני נעזר באינטגרציה בחלקים ($= c_0\int_V \Delta_x u\,dx$), כאשר נזכיר $\Delta_x u=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}u(x)$.

נקבל $\int_V c_0\frac{\partial}{\partial t}u - c_1\Delta_x(t,x)\,dx=0$ לכל V, כלומר הפונקציות $\frac{\partial}{\partial t}u,\ \Delta_x u$ ליניאריות (נניח לשם פשטות שהן ~~שוות~~ שוות עד כדי שינוי יחידות).

משפט: לכל $\varphi\in C(\mathbb{T})$ קיימת ויחידה $u(t,x)=u\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{T})$ עם $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ ו- $u(t,x)\xrightarrow[t\to0]{\text{במ"ש}}\varphi(x)$.
כלומר פתרון יחיד של משוואת החום לכל תנאי התחלה ב-$\mathbb{T}$.

"הוכחה": $u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)e^{inx}$ (יש התכנסות לכל $u\in C^\infty$). אז $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t)(in)^2e^{inx}$. כיון ש- $c_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t,x)e^{-inx}dx$ אז c גזירה ברציפות ולכן נוכל לגזור תחת סימן האינטגרל: $\frac{d}{dt}c_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)e^{-inx}dx$.
נקבל (שוב התכנסות כי $\frac{\partial u}{\partial t}\in C^\infty$) $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(t)e^{inx}$, וכיון ששני טורים אלו מתכנסים ל-u נסיק $\underline{c_n'(t)=-n^2c_n(t)}$ ולכן $\underline{c_n(t)=c_n(0)e^{-t\cdot n^2}}$ ולכן $u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(0)e^{inx-n^2t}$. נרצה שגם תהיה התכנסות במ"ש ל-φ ב-0, כלומר התכנסות של מקדמי פורייה, כלומר $\underline{c_n(0)=\hat\varphi(n)}$.
כלומר, הוכחנו יחידות וגם מצאנו נוסחה. $u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat\varphi(n)e^{inx-n^2t}$.

מה הבעיה שהופכת את זה ל"הוכחה"? שלא ברור מה צריך לדרוש על φ כדי שזה יהיה $\underline{C^\infty}$, למשל, או כדי ש- $u(t,x)\underset{t\to0}{\rightrightarrows}\varphi(x)$.

אבל $\hat\varphi(n)$ ובפרט חסומות, נקבל התכנסות במ"ש של הטור לכל $t>0$ כי e^{-n^2t} דועך מהר מאוד ובדומה של הנגזרות. ולכן העובדה שכל איברי הטור הם C^∞ גוררת אותו דבר ל-u.

למה $u(t,x)\underset{t\to0}{\rightrightarrows}\varphi(x)$? (C^∞ לכל $t>0$) נוכיח כאן רק למקרה בו $\varphi\in A(\mathbb{T})$, כלומר $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat\varphi(n)|<\infty$.
נגדיר $g_t(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{inx-n^2t}$ ו- $G(t,x)=g_t(x)$. אז $u(t,x)=(\varphi*g_t)(x)$.
לכל x, כאשר $t\to0$ g_t זו יחידה אפרוקסימטיבית

ברור ש- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_t(x) = 1$ לכל t.

אם $g_t \geq 0$ אז $\int_{-\pi}^{\pi}|g_t(x)|=1$ חסום ע"י קבוע שאינו תלוי ב-t, וגם

יש אופרטורים $T_t: f \mapsto g_t * f$, כך ש- $T_t \in \mathcal{L}(C(\mathbb{T}))$ ו-$\|T_t\| \leq \|g_t\|_1 = 1$ (למעשה

זה שוויון. למה? כי זה $\sup_{\|f\|\leq 1} \max_{x\in\mathbb{T}} |\int_{-\pi}^{\pi} g(y) f(x-y)dy|$, וזה לכל היותר

$\sup_{\|f\|\leq 1}\max_{x\in\mathbb{T}} \|g\|_1 \cdot \max|f(y)| = \|g\|_1\|f\|_{C(\mathbb{T})}$. אז לכל $f\in A(\mathbb{T})$, $T_t f \to f$ ו-A

תת מרחב צפוף ב-$C(\mathbb{T})$ וגם לכל $f\in C(\mathbb{T})$, $T_t f \xrightarrow[C(\mathbb{T})]{} f$. למה זה

נכון?

<u>למה</u> $S_t \in \mathcal{L}(X,Y)$ כאשר X,Y מרחבים נורמ"ים, $\|S_t\|\leq M<\infty$ לאיזשהו

$M>0$ לכל t, ועל $E\subseteq X$ צפופה לכל $x\in E$ $S_t x \to Tx$ לאיזשהו

$T\in\mathcal{L}(X,Y)$. אז לכל $x\in X$ $S_t x\to Tx$.

<u>הוכחה</u> יהי $x\in X$, $\varepsilon>0$, אזי יש $y\in E$ כך ש-$\|y-x\|<\frac{\varepsilon}{2(M+\|T\|)}$. ו- t קטן מספיק $t<\delta$,

$\|S_t y - Ty\| < \frac{\varepsilon}{2}$. בסה"כ נקבל, ל- $0<t<\delta$, ש- $\|S_t x - Tx\| =$

$= \|(S_t - T)y + (S_t-T)(x-y)\| \leq \|(S_t-T)y\| + \|(S_t-T)\|\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. זה

נכון ל-$\varepsilon>0$ שרירותי ולכן $\|S_t x - Tx\| \to 0$ ו- $S_t x\to Tx$ בנורמה.

לכן נותר רק להראות $g_t\geq 0$. ה"ג C^∞ ולכן זה שקול לכך

שלכל $f\in C^2(\mathbb{T})$ אי-שלילית מתקיים $\int fg\geq 0$. אבל מהגדרת g_t זה שקול לכך ש-

$(g_t * f)(0) = \sum \hat f(n) e^{-n^2 t}[e^{inx}=1] \geq 0$. נוכיח ש- $g_t * f\geq 0$ <u>לכל x ולכל t</u>.

אבל $C^2(\mathbb{T})\subseteq A(\mathbb{T})$ ולכן $(g_t*f)(x)=u(t,x)$ זה בדיוק פתרון למשוואת החום

הרלוונטית (מוכלל היה התכנסות במ"ש כאשר $t\to 0$ שאנחנו מוכיחים כרגע).

אבל $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ותנאי התחלה $u(0,x)=f(x)\geq 0$. כלומר, צריך להוכיח

איזשהו <u>שימור חום</u>. נגדיר פונקציית עזר $v(t,x)=e^{-t}u(t,x)$ ונוכיח

שה"ג אי-שלילית. לפי המשוואה שמצאנו $|u(t,x)|\leq\sum|\hat f(n)|<\infty$ ולכן $v(t,x)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$

במ"ש ב-x. אם $u(t,x)$ שלילית בנק' מסוימת נקבל מינימום גלובלי של

v עבור איזשהו $0<t_1<\infty$ ו-x_1. מה זה אומר על $\frac{\partial u}{\partial t}=e^t(v+\frac{\partial v}{\partial t})$

ועל $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^t\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$? נקבל $v+\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ בכל (t,x), ובפרט

במינימום. אבל שם $v<0$, $\frac{\partial v}{\partial t}=0$ ו-$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\geq 0$, בסתירה.

הטריק של כפל ב-e^{-t} חוזר הרבה בתחומים האלו.

עוד שימוש - ניקח $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$, $\bar{D}=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$. נרצה לפתור

את בעיית דיריכלה - למצוא $u\in C^2(D)\cap C(\bar{D})$ עם $\Delta u=0$ ותנאי שפה

נתונים $f\in C(\mathbb{T})$ (כאשר נזהה את $\mathbb{T}$ עם ∂D), כלומר $u|_{\partial D}=f$.

גישות טובות: לעבוד במרוכבים או לעבור לקואורדינטות פולריות -

$z=r\cdot e^{it}$. בקואורדינטות פולריות לפלסיאן זה $\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}v)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0$

נחשוב על $v(r,t)=u(r\cos t,r\sin t)$ ונעשה פורייה: $v(r,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(r)e^{int}$, כאשר

$c_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(r,t)e^{int}dt$. נצטרך להשוות מקדמים כדי לקבל $\Delta u=0$ ונקבל מד"ר

מסדר 2 ב-c_n, שבפועל אומר ש-$c_n(r)e^{int}$ הרמונית. לכן מספיק

לפתור את הבעיה ל-$f(t)=e^{int}$. פתרונות אפשריים שיתנו פונקציה

(אנליטית, ובפרט) הרמונית זה $\underset{(\text{עד כדי קבוע})}{c_n(r)=r^n}, r^{-n}$ ולכן הם פורשים את מרחב

הפתרונות. אבל רק הראשון מוגדר ב-0 ולכן $c_n(r)=c_n\cdot r^n$. המשך בפעם

הבאה.