W3D1

אנליזה הרמונית

22/3/15

דיברנו בשבוע שעבר על יחידה אפרוקסימטיבית.

ראינו $k_\varepsilon * f \to f$ ב- L_p וב- C. בדרך הוכחנו למה חשובה,
שההעתקה $t \mapsto f_t$ (כאשר $f_t(x)=f(x-t)$) רציפה.

<u>תרגיל</u>: לכל $\varepsilon>0$ קיים מספר <u>סופי</u> של נק' $t_1,\dots,t_n$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כך שלכל $t\in[-\pi,\pi]$ קיים $1\le j\le n$ כך ש- $\|f_t-f_{t_j}\|_{L_p}<\varepsilon$.

<u>מסקנה</u> (מה תרגיל): אם f אינטגרבילית ולכל $t\in(a,b)$, $f(t)=0$, אז לכל $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ מתקיים ש- $g_s(t)=\frac{f_s(t)}{e^{it}-1}$ מקיימים $\hat{g}_s(n)\to 0$ במ"ש ב- $s\in[\alpha,\beta]$,
ולכן הטור $\sum \hat{f}(n)e^{int}$ מתכנס במ"ש ל-0 על $[\alpha,\beta]$.

נסמן את אוסף ה- $f\in C(\mathbb{T})$ עם $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(n)|<\infty$ כ- $A(\mathbb{T})$. ו- $f,g\in A(\mathbb{T})$,
$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int}$ ו- $g(t)=\sum\hat{g}(n)e^{int}$ מתכנסים בהחלט, ואפשר לעשות מכפלת קושי. $(fg)(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{int}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{g}(n-k)$ לכן $\widehat{(fg)}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\hat{g}(n-k)$

ניעזר בגרעין פייר. $(N+1)\sigma_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}(N+1-|k|)e^{ikt}$ ול- $(\sin\frac{t}{2})^2$ פולינום טריגונומטרי (זה שווה $\frac{2-e^{it}-e^{-it}}{4}$). לכן $h(t)=4(N+1)\sigma_N\sin^2\frac{t}{2}$
מקיימת $\hat{h}(n)=-2\hat{f}(n)+\hat{f}(n-1)+\hat{f}(n+1)=0$ עבור $n\neq 0,\pm N$, ו- $\hat{f}(0)=-2$ ו- $\hat{f}(\pm(N+1))=1$, ולכן $h(t)$ שווה $-2+e^{i(N+1)t}+e^{-i(N+1)t}=-4(\sin\frac{N+1}{2}t)^2$, ולכן
$\sigma_N(t)=\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\frac{N+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2\geq 0$. לכן $\|\sigma_N\|_{L_1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_N(t)|dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_N(t)dt=1$, ו- $\int_{\delta<|x|<\pi}|\sigma_N(x)|dx\leq\frac{2\pi}{(N+1)\sin(\frac{\delta}{2})^2}\xrightarrow{N\to\infty}0$
לכן σ_N יחידה אפרוקסימטיבית, שהיא פולינום טריגונומטרי, $\sigma_N\in T_N$

<u>מסקנה</u>: (ויירשטראס II), $\{e^{int}\}$ שלמה ב- L_p או ב- $C(\mathbb{T})$, כי קונבולוציה עם פול' טריגונומטרי זה פול' טריגונומטרי.

<u>מסקנה</u>: משפט יחידות - נכון לכל p אבל נדרש ל- $p=1$ כי זה הכי חזק.
אם $f\in L_1(\mathbb{T})$ ולכל n, $\hat{f}(n)=0$ אז $f\equiv 0$, כי $\sigma_N*f\equiv 0$ שואפים ל- f בנורמת L_1.

במקרה $p=2$ של משפט ויירשטראס נקבל $\{e^{inx}\}$ בסיס אורתונורמלי ב- $L_2(\mathbb{T})$,
אז יש שוויון פרסבל - לכל $f\in L_2(\mathbb{T})$ מתקיים $\|f\|_2^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|^2$ ו- $\langle f,g\rangle_2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)}$, כלומר טור פורייה זו איזומטריה מ- $L_2(\mathbb{T})$ ל- ℓ_2.

קצת על שימושים:

נחשוב על פיזור חום על ישר חד-מימדי. נחשוב על חוט באורך תווך

מקודד חום. בזמן 0 התפלגות החום מתוארת ע"י $u(0,x)$ ובזמן t ע"י $u(t,0)$. בזמן קצר Δt שינוי של חום בקטע x $\Delta Q = c\cdot[u_x(t+\Delta t,x)-u_x(t,x)]\cdot\Delta x$.

השערה של ניוטון - קצב $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ תלוי רק בגרדיאנט של הטמפרטורה, ומפלו פרופורציונלי. כלומר $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]_{(a,t)}^{(b,t)}$. נקבל בקטע קטן ש-

$[u_x(t+\Delta t,x)-u_x(t,x)]\Delta x = c\Delta t[u_x(t,x+\Delta x)-u_x(t,x)]$. נקבל כש-$\Delta x,\Delta t\to 0$ את משוואת החום המפורסמת $\frac{\partial u}{\partial t} = c\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. בשבוע הבא נספר איך לפתור עבור קטע מעגלי (= חוט מעגלי).