

15/3/15

15/2

* פניו שמורה על הוא אלגברה (ולא יחידה) כיחס לקונסטרואציה.

* הצדדו יחידה אמרוקסימטיות אבל לא הוכחו שהיא מקימה תכונות של "התכנסות יחידה".

כדי להוכיח את זה (ובצד משוואת חזק יותר) צריך קודם:

א"ע מנקובסקי: תהי $L^1(dx \cdot dy)$ אזי במרחב x - y $f(x) = \int F(x, y) dy$ אז $\|f\|_1 \leq \int \|F(\cdot, y)\|_1 dy$ (למה $\|F(\cdot, y)\|_1$ מוגדר? אולי)

נשתמש בג'ס הולדר: $\|f\|_1 \leq \|F\|_1$ כאשר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, שרואים במבוא למרחבי הילברט.

$$\|f\|_1^p = \int \left| \int F(x, y) dy \right|^p dx = \int \left| \int F(x, y) dy \right|^{p-1} \cdot \left| \int F(x, y) dy \right| dx \leq \int \|F(\cdot, y)\|_1^p dy$$

$$\int \left(\int \|F(\cdot, y)\|_1^{p-1} |F(x, y)| dx \right) dy \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int \|F(\cdot, y)\|_1^{p-1} \|F(\cdot, y)\|_1 dy = \int \|F(\cdot, y)\|_1^p dy$$

$$\|f\|_1^p = \|f\|_1 \leq \int \|F(\cdot, y)\|_1 dy$$

במצב הוכחנו רק אחידה סופית - על $\mathbb{R}^2$ אבל צריך קצת יותר - לא ברור בכלל ג'ס $\|F(\cdot, y)\|_1$ אבל מספיק ש-

אינטגרליות לפי dy, dx מתפרז כדי להוכיח גם במקרה זה.

מסקנה אם $f \in L^p(\mathbb{T})$, $g \in L^q(\mathbb{T})$ אז $f * g \in L^1(\mathbb{T})$ ו- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

כאומר - כל $f \in L^1(\mathbb{T})$ מעבירה פונקציה אינטגרלית $f * g = g * f$ על $L^1(\mathbb{T})$

ו- $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

המבחן נגדיר $(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy$ אז $\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$ והמסקנה נובעת

אם ג'ס מנקובסקי:

משפט אם $f \in C(\mathbb{T})$ אז $f_\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f$ (נזכר $(f_\tau(x) - f(x-\tau))$ בדומה)

אבל $1 \leq p \leq \infty$, אם $f \in L^p(\mathbb{T})$ אז $f_\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} f$

הוכחה חלק ג' - $\|f_\tau - f\|_1 = \max_{x \in [-\tau, \tau]} |f_\tau(x) - f(x)| = \max_{x \in [-\tau, \tau]} |f(x-\tau) - f(x)|$

כאשר $\tau < \delta$, זה אולי היותר $\max_{|x-y| < \delta} |f(x) - f(y)| \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$

בכלל רציפות במ"ס (אם הגדרת רציפות במ"ס, f רציפה בקטע סגור)

חלק ב' - נו, $C(\mathbb{T})$ צפוף ב- L_p . כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $g \in C(\mathbb{T})$ כזה
 שם $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $g \in C(\mathbb{T})$ כזה
 (כ) $\|f - g\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \|g - g_\tau\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$.
 ל- τ קטן מספיק, לפי תוצאה.

בשורה של אנליזה: הזרמה $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר φ היא צפיפה.
 המעבר $f_\tau = f \circ \varphi$ כאשר $f \in X$ ו- φ היא צפיפה.

בפרט, אם $I \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית אז $f(I)$ סגור.
 בעזרת נוסחה ההפוכה יחידה אפואקסימלית:

$$1. \sup \|k_n\| < \infty$$

$$2. \int_{\mathbb{R}} k_n(x) dx = 1$$

$$3. \int_{\mathbb{R}} |k_n(x)| dx \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

מטעם במקרה כזה לכל $f \in X$ (שבו X הוא $C(\mathbb{T})$ או $L_p(\mathbb{T})$ כחל) $k_n * f \xrightarrow{X} f$

$$k_n * f \xrightarrow{X} f \text{ (קודם)}$$

$$(כ) \int_{\mathbb{R}} k_n(x) dx = 1$$

$$(k_n * f - f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k_n(y) [f(x-y) - f(x)] dy$$

מכיון L_p הוא סגור כל קבוצה סגורה תחת L_p נקבל מהתוצאה:

$$\|k_n * f - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}} |k_n(y)| \cdot \|f_y - f\|_p dy \leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} |k_n(y)| dy \cdot \|f_y - f\|_p + \int_{\mathbb{R}} |k_n(y)| dy \cdot \|f_y - f\|_p \right)$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left(2\|f_p\| \cdot \int_{\mathbb{R}} |k_n(y)| dy + M \cdot \sup_{y \in \mathbb{R}} \|f_y - f\|_p \right)$$

ונכל לבחור ε קטן מספיק כך ששני האיגדים יהיו קטנים יותר מ- $\frac{\varepsilon}{2}$ ונקבל
 $\|k_n * f - f\|_p < \varepsilon$

נשים לב שגם אם f איננו רציפה (שזוהי בעיה בפרק 2)

הוא יכול להיות L_p (המשפטים) T_n (המשפטים) M $\|T_n\|$

מקיימים $f \in L_p \Rightarrow T_n f \in L_p$ כל פונקציה רציפה ב- L_p כיון שהפונקציות
 אורתוגונליות נוסף $f \in L_p \Rightarrow T_n f \in L_p$ כל $f \in L_p(\mathbb{T})$