אנליזה הרמונית

הגדרנו <u>סימן לז'נדר</u> על $\mathbb{Z}_p^*$, הקרקטר הלא טריוויאלי היחיד מסדר 2.

נחשב ט' פורייה של סימן לז'נדר - $\hat{L}_p(\chi_k)=\sum_{j=0}^{p-1} L(j)\overline{\chi_k(j)} = \sum_{j=1}^{p-1} L(j)\chi_1(kj)=\sum_{a=1}^{p-1} L(k^{-1}a)\chi_1(a)=\overline{L(k)}\sum_{a=1}^{p-1} L(a)\chi_1(a)=\overline{L(k)}\cdot\hat{L}(\chi_k)$. אבל סימן לז'נדר L כפלי ולכן זה

קיבלנו $\hat{L}(\chi_k)=L(k)\hat{L}(\chi_1)$: צרכי

קבוע, $\hat{L}=L$. נזכר ש:

$$\hat{L}_p(\chi_k)=\sum_{j=1}^{p-1} L(j)e^{-\frac{2\pi ijk}{p}}=\sum_{j\in Q}\overline{\chi_k(j)}-\sum_{j\in Q^c}\chi_k(j)=1+2\sum_{j\in Q}\overline{\chi_k(j)}.$$

כעת, $\sum_{j\in Q}\chi_k(j)=\sum_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}\chi_k(a^2)$ ולכן $1+2\sum_{j\in Q}\chi_k(j)=\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}}\chi_k(a^2)$

וכיוון ש- $\hat{L}_p(\chi_k)=L(k)\hat{L}(\chi_1)$ נקבל $L(k)=\frac{\sum_{a=-\frac{p-1}{2}}^{\frac{p-1}{2}} e(a^2k/p)}{\sum_{a=\frac{1-p}{2}}^{\frac{p-1}{2}} e(a^2/p)}=\frac{G_p(k)}{G_p(1)}$.

<u>מסקנה</u> - <u>הדדיות ריבועית</u> - ל- p,q ראשוניים,

$$L_p(q)\cdot L_q(p)=\frac{G_p(q)G_q(p)}{G_p(1)G_q(1)}$$

מתקיים $G_p(q)G_q(p)=\sum_{a=0}^{p-1}e(a^2q/p)\sum_{b=0}^{q-1}e(b^2p/q)$, ששווה ל-

$\sum_{\substack{a \bmod p\\ b \bmod q}} e\left(\frac{a^2q^2+b^2p^2}{pq}\right)=\sum_{a,b}e\left(\frac{(aq+bp)^2}{pq}\right)=G_{pq}(1)$ לפי משפט השאריות הסיני.

ראינו נוסחה ל $G_n(1)=\sqrt{n}\, i^{\frac{(n-1)^2}{4}}$, ולכן $\frac{G_{pq}(1)}{G_p(1)G_q(1)}=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$

נגדיר טופ' על $\hat{G}$: לכל $K\subseteq G$ קומפקט, $\varepsilon>0$, $V_{\varepsilon,K}(\mathbb{1})=\{\chi\in\hat{G} \text{ s.t. } \sup_{g\in K}|\chi(g)\mathbb{1}^{-1}(x)|<\varepsilon\}$

למשל, ל- $G=\mathbb{Z}$ טופ' ב $\mathbb{T}=\hat{\mathbb{Z}}$ היא טופ' רגילה ב-$\mathbb{T}$.

כמו כן $\mathbb{R}=\hat{\mathbb{R}}$ בתור טופולוגיות, ב- $\mathbb{Z}=\hat{\mathbb{T}}$ (לא במקרה, פונטריאגין $\hat{\hat{G}}=G$).