אנליזה הרמונית

הינו באמצעות הוכחת המשפט השני של פלה-ונר - אם $F\in A(\mathbb{C})$, וקיים $0<A<\infty$ ש- $|F(z)|\le C\cdot e^{A|z|}$, ו- $\varphi=F|_{\mathbb{R}}\in L_2(\mathbb{R})$. אז קיימת $f\in L_2(-A,A)$ כך ש- $F(z)=\int_{-A}^{A} f(t)e^{itz}dt$.

הוכחה: הצרוף $H_+(z)=\int_0^\infty f(x)e^{-izx}dx\in A(\Pi_-)$, $H_-(z)=-\int_0^\infty F(x)e^{izx}dx\in A(\Pi_+)$. נרצה להראות שאפשר להרחיב באופן רציף את $H_\pm(z)$ גם ל- $(-\infty,-A)\cup(A,\infty)$ כך שהערכים של ה- $H_\pm$-ים שם יצדקו.

נגדיר $H(z)=i\int_0^\infty F(ix)e^{zx}dx$, אז $|F(x)|\le Ce^{xA}$ ולכן ל- $\mathrm{Re}\,z<-A$ האינטגרל מתכנס בהחלט, ולכן $H\in A(\underbrace{\mathrm{Re}\,z<-A}_{\Pi})$.

לטענה: לכל $z\in\Pi_-\cap\Pi$ מתקיים $H_+(z)=H(z)$.

[בפועל, איך מקבלים ה-H-ים הללו? לוקחים $G(w)=F(w)e^{-iwc}$ ומסלול $\gamma_0(t)=t$ ל- $0<t<\infty$. $H_+(c)=\int_{\gamma_0}G(w)dw$. בדומה למסלול $\gamma_1(t)=-t$ נקבל $H_-(c)$, ל- $\gamma_2(t)=it$ נקבל $H(c)$.

המשפט קושי מסביר להראות שאינטגרל על Γ_R שואף (R→∞) ל-0. אבל צריך לראות גבול N- $\frac{\pi}{2}R\cdot\max_{w\in\Gamma_R}|G(w)|$, $|G(w)|\le Ce^{AR}\exp\mathrm{Im}\,cw$ -1.

כאשר $c=\lambda e^{i\frac{5}{4}\pi}$, נקבל $cw=R\lambda\exp i(\theta-\frac{3}{4}\pi)$, אז $\mathrm{Im}\,cw=R\lambda\sin(\theta-\frac{3}{4}\pi)$.

אבל θ בטווח בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$ ובטווח הזה מקסימום של $\sin(\theta-\frac{3}{4}\pi)$ יהיה $\frac{\sqrt{2}}{2}$. נקבל $|G(w)|<C\cdot e^{AR}\exp(-R\lambda\frac{\sqrt{2}}{2})$, כלומר $|\int_{\Gamma_R}G(w)dw|<C\frac{\pi}{2}R\exp(R\lambda)$ שואף ל-0 כאשר $R\to\infty$. כלומר, לכל $c=\lambda e^{i\frac{5}{4}\pi}$ ל- λ גדול מספיק, $H(c)=H_+(c)$. זה תקף עם נק' הבטחות ולכן בחיתוך $\Pi\cap\Pi_-$ שתיהן שוות. מאותו חישוב בדיוק גם ב- $\Pi\cap\Pi_+$ $H(c)=H_-(c)$. אותו דבר גם בחצי מישור ימני ע"י $\gamma_3(t)=-it$. מסקנה: לכל $|t|>A$, $\lim_{s\to0^+}[H_+(t+is)-H_-(t-is)]=0$.

כלומר, $\int_0^\infty F(x)e^{-i(t-is)x}dx+\int_0^\infty F(-x)e^{i(t+is)}dx\xrightarrow[s\to0^+]{}0$. נחליף באינטגרל השני x ל- $-x$ ונקבל שזה $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ixt+sx}$. נקבל שסכום האינטגרלים הוא $\int_{-\infty}^{\infty}F(x)e^{-ixt-s|x|}dx\xrightarrow[s\to+0]{}0$. נקבל ש- $\varphi_s(x)=F(x)e^{-s|x|}$ ב- $L_1\cap L_2$. אז לכל $|t|>A$, $\hat{\varphi}_s(t)\xrightarrow[s\to0]{}0$. בגלל שזה ב- L_2 מתקיים $\hat{\varphi}_s=\sqrt{2\pi}\,\widetilde{\varphi_s}$ -1 $\varphi_s\xrightarrow{L_2}\varphi$ כאשר $\varphi(x)=F(x)$.

לכן יש תת"ס $s_1,\dots,s_n,\dots$ שמתכנסת כמעט בכל מקום

לכן כמעט לכל t מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{S_n}(t) \to (\sum_{n=1}^{\infty}\varphi)(t)$ $\to 0$. אם $f=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi$ נמצאת ב- $L_2(\mathbb{R})$ אפשר להתמקד על $[-A,A]$ ולקח ב- $L_2(-A,A)$.
אם $F(x)=\int_{-A}^{A} f(t)e^{itx}\,dt$ כנדרש.

נק' מבט כללית

מה משותף לטורי פוריה ולטרנספורם פוריה? פונקציות מוגדרות במקום ש"ש בו הצבה (translation) - הפעלה של G על $L_2(G)$ (תבורה קומוטטיבית-קיימת מקרי) כאשר G תבורה טופולוגית (קומוטטיבית).

מקרה הכי טוב - G קומפקטית. במצב כזה קיימת מידת האר μ_G (לא טריוויאלית) שמוגדרת לבחורה עם קבוצות בורל ואינווריאנטית להצבה - $\int_G f(g+h)\,d\mu_G(g)=\int_G f(g)\,d\mu_G(g)$ לכל $f:G\to\mathbb{C}$ אינטגרבילית ו- $h\in G$. μ_G יחידה עד כדי קבוע, ובמקרה ש- G קומפקטית אם $\mu_G(G)<\infty$ ($f\in L_1(G,\mu_G)$) ולכן בד"כ נבחר כך ש- $\mu_G(G)=1$.
במעגל $\mathbb{T}$ זה פשוט מידת לבג (עם נרמול $\frac{1}{2\pi}$).
מידת האר קיימת גם במקרה ש- G קומפקטית מקומית לכל $x\in G$ קיים בסיס סביבות שהסגור של כל קבוצה בו קומפקטי.
למשל: $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{R}^n$, עם מידת לבג (ב- $\mathbb{T}^n$ אפשר לנרמל $\frac{1}{(2\pi)^n}$). עוד דוגמה
תשובה: תבורות סופיות, ובמיוחד $\mathbb{Z}_n=\{0,\dots,n-1\}$ עם חיבור mod n, והטופולוגיה הדיסקרטית (עם מידת ספירה, אלו כפולות $\frac{1}{n}$). $\mathbb{Z}$ עם טופ' דיסקרטית ו-עם מידת ספירה (קומפקטית מקומית).
במצב זה אפשר להגדיר קונבולוציה של $f_1,f_2\in L_1(G,d\mu_G)$ ע"י $(f_1*f_2)(h)=\int_G f_1(h-g)f_2(g)\,d\mu_G(g)$ כרגיל מוגדר כמעט לכל h ע"י פובני.
הגדרה $\chi:G\to\mathbb{C}^*$ קרקטר אם זה הומ' רציף של G ל- $\mathbb{T}$ (מעגל יחידה לפי כפל). נסמן $\hat{G}$ אוסף הקרקטרים. אז הוא תבורה.
משפט ל- G קומוטטיבית, $1\neq\chi\in\hat{G}$, אז $\int_G \chi(g)\,d\mu_G(g)=0$.
הוכחה יהי $h\in G$. מאינווריאנטיות μ_G, $\int_G\chi(g)\,d\mu_G(g)=\int_G\chi(g-h)\,d\mu_G(g)=\chi(h)\int_G\chi(g)\,d\mu_G(g)$. לכן אם $\int_G\chi(g)\,d\mu_G(g)\neq 0$ נקבל $\chi(h)=1$ לכל $h\in G$, בסתירה לנתון.
מסקנה אם $\chi_1\neq\chi_2\in\hat{G}$ אז $\int_G\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}\,d\mu_G=0$. כלומר, קרקטרים שונים אורתוגונלים.