W11D3

2/6/15

אנליזה הרמונית

בפעם שעברה הוכחנו:

משפט הגבול המרכזי (ההתחלה): אם $X_1,\dots,X_n$ שה"ב, $\mathbb{E}X=0$, $\mathbb{E}X^2=1$, אז מתקיים
$$\mathbb{E}f\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt n}\sum_{i=1}^{n}X_i}_{=\bar X}\Big)\longrightarrow \mathbb{E}f(g)$$
לכל $f\in S$.

$$\mathbb{E}(f(g))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-x^2/2}dx$$ [g מציין מ"מ גאוסיני]

כדי להוכיח את מג"א צריך $f=\chi_{[a,b]}$ אבל זה לא חלק.

ניקח את f הזו:

טענה לכל $\varepsilon>0$ קיימות $f_\varepsilon\le f\le f^\varepsilon$, $f_\varepsilon,f^\varepsilon\in S$ כך ש- $\operatorname{supp}[f^\varepsilon-f_\varepsilon]\subseteq(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\cup(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$

למה? ניקח ג'ינשהי $0\le\varphi\in C^\infty$ שנתמכת על $(-\frac{\varepsilon}{2},\frac{\varepsilon}{2})$ ו- $\int_{\mathbb R}\varphi=1$.

ניקח $f^\varepsilon=\chi_{[a-\frac{\varepsilon}{2},b+\frac{\varepsilon}{2}]}*\varphi$ ו- $f_\varepsilon=\chi_{[a+\frac{\varepsilon}{2},b-\frac{\varepsilon}{2}]}*\varphi$.

כעת, $\mathbb{E}f_\varepsilon(\bar X)\le\mathbb{E}f(\bar X)\le\mathbb{E}f^\varepsilon(\bar X)$, ואלו פונקציות ב- S.

נבדוק שההפרש בין הקצוות שואף ל-0 וסיימנו!

ט' פורייה לפונקציות מרוכבות (משפטים של פלי-וינר)

תהי $f\in L_2(\mathbb R_+)$. נסתכל ב- $F(z)=\int_0^\infty f(t)e^{itz}dt$ (מוגדר ל- $\operatorname{Im}z>0$ - Π_+).

נבדוק רציפות: אם $\operatorname{Im}z_n>\delta>0$ סדרה מתכנסת ל- z, נבדוק $F(z_n)\to F(z)$ לפי לבג. $f(t)e^{itz_n}\xrightarrow{n\to\infty}f(t)e^{izt}$ נקודתית. למה יש מז'ורנטה אינטגרבילית? כי זה $|f(t)e^{itz_n}|\le\underbrace{|f(t)|\cdot e^{-\delta t}}_{\text{אינ' ב-}\mathbb R_+}$

נבדוק אנליטיות - צריך שלכל $\gamma:[a,b]\to\mathbb C$ סגורה, $\int_\gamma F=0$.

ניקח $\delta=\min_{x\in[a,b]}\operatorname{Im}\gamma(x)$. לכן $\int_\gamma F(z)dz=\int_a^b\left(\int_0^\infty f(t)e^{it\gamma(s)}dt\right)\gamma'(s)\,dt\in L_1(ds,dt)$ מוגדר (חסום ע"י $C\cdot|f(t)|\cdot e^{-t\delta}$, אינ' לפי t,s וגם לחסום) Tonelly, Fubini

ולכן נחליף סדר סכימה ונקבל $\int_0^\infty\underbrace{\int_a^b\gamma'(s)e^{it\gamma(s)}}_{\int_\gamma}=0$

מה כאשר נשאיר $y>0$ קבוע ונציג x? למה $F_y(x)=F(x+iy)$?

נקבל $F_y(x)=\int_0^\infty f(t)e^{-ty}e^{itx}dt$, $=\sqrt{2\pi}\,\mathcal F^{-1}(f(t)e^{-yt}\chi_{\mathbb R_+})$ זה אומר ש-

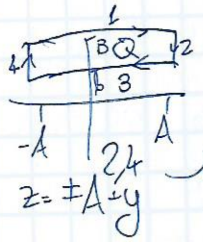
$\|F_y\|_{L_2}\le\sqrt{2\pi}\|f\|_{L_2}$ לכל y (כי $\|f\cdot e^{-yt}\|\le\|f\|$).

משפט $F\in A(\Pi_+)$ ולכל y מתקיים $\|F_y\|\le C<\infty$. אז קיימת $f\in L_2(\mathbb R)$ שנתמכת על $[0,\infty)$, כך ש- $F(z)=\int_0^\infty f(t)e^{itz}dt$,

$\|f\|_{L_2}\le\sqrt{2\pi}C$

אם זה נכון, אז לכל y חיובי $f(t)e^{-yt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}F_y)(t)$. כלומר - $\frac{e^{yt}}{\sqrt{2\pi}}(\mathcal{F}F_y)(t)$
לא תלוי ב-y.

נשים לב ש-F_y לא בהכרח אינטגרבילית, אבל בהנחה שהאינטגרל מתכנס נוכל לכתוב $e^{yt}(\mathcal{F}F_y)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x+iy)e^{-it(x+iy)}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}+iy}\underbrace{F(z)e^{-itz}}_{\text{אנליטי}}dz$ זה כבר נראה פחות מופרך, ואולי מזכיר את משפט קושי. ננסה להסיק משימוש בו:



ניקח $0<b<B<\infty$, $0<A<\infty$ ונעשה אינטגרל על מלבן
ממשפט קושי $\oint F(z)e^{-itz}dz=0$. נרצה שהאינטגרל בצלעות 2,4 $\int_b^B|F(z)||e^{-itz}||dz|$
יהיה קטן. הערך של חסום ∂Q על ידי (עבור $A_n\to\infty$ מסוימים)

נעזר בפונקציה $\psi(x)=\int_b^B|F(x+iy)|e^{ty}dy+\int_b^B|F(-x+iy)|e^{ty}dy$. מקושי-שוורץ $\psi^2(x)\le 2\left(\int_b^B|F(x+iy)|^2dy\right)\left(\int_b^B e^{2ty}dy\right)+$
$2\left(\int_b^B|F(-x+iy)|^2dy\right)\left(\int_b^B e^{2ty}dy\right)$

ו-$\psi^2(x)$ כבר אינטגרבילית! נקבל $\int_0^\infty\psi^2(x)\le\overbrace{4(B-b)C^2}^{\text{לא תלוי ב-}t}\cdot\int_b^B e^{2ty}dy<\infty$

לכן קיימות $x_1,\dots,x_n,\dots\nearrow\infty$ כך ש-$\psi(x_n)\to 0$, בקצב שאינו תלוי ב-t.

לכן, לכל t מתקיים $\left|\underbrace{\int_{-A_n}^{A_n}F(x+ib)e^{-it(x+ib)}dx}_{e^{tb}g_n^b(t)}-\underbrace{\int_{-A_n}^{A_n}F(x+iB)e^{-it(x+iB)}dx}_{e^{tB}g_n^B(t)}\right|\to 0$

כאשר $g_n^b(t)=\int_{-A_n}^{A_n}F_b(x)e^{-itx}dx=\widehat{\chi_{[-A_n,A_n]}\cdot F_b}(t)$. אבל $\chi_{[-A_n,A_n]}F_b\xrightarrow{L_2}F_b$

ולכן L_2-גבול כש-$n\to\infty$ זה $\mathcal{F}F_b=\lim^{L_2}_{n\to\infty}\mathcal{F}\chi_{[-A_n,A_n]}F_b=\sqrt{2\pi}\lim^{L_2}_{n\to\infty}g_n^b$

ולכן יש תת סדרה שעבורה ההתכנסות ~~כמעט בכל מקום~~
כמעט בכל מקום. נעבור שוב לתת סדרה עבור B ונקבל
$g_{n_k}^b(t)\xrightarrow{a.e.}(\mathcal{F}F_b)(t)$, $g_{n_k}^B(t)\xrightarrow{a.e.}(\mathcal{F}F_B)(t)$. אבל גם $\left|e^{tb}g_{n_k}^b(t)-e^{tB}g_{n_k}^B(t)\right|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$
ולכן $e^{tB}(\mathcal{F}F_B)(t)=e^{tb}(\mathcal{F}F_b)(t)$ כמעט לכל t.

זה כבר (כמעט) סוף ההוכחה, נשלים את היתר בשבוע הבא.