

V/D3
10/3/15

אנליזת פורייה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx} = f(x) \quad \text{של} \quad \frac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega} \in L_1(\mathbb{T}) \quad \text{ול} \quad f \in L_1(\mathbb{T})$$

אפשר להגדיר את f כפונקציה רציפה או כפונקציה $f=g$ כפונקציה של x ופונקציה f של n .
 $\hat{f}(n) e^{inx} = \hat{g}(n) e^{inx}$

אם f מתקיימת $f(0)=0$ ו- $f \in L_1(\mathbb{T})$ אז $\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n)$

אם f מתקיימת $f(0)=0$ ו- $f \in L_1(\mathbb{T})$ אז $\hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n)$

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx dt$$

$$F(2\pi+t) = F(t) + \int_t^{2\pi+t} f(x) dx = F(t) + \int_t^0 f(x) dx$$

$$\hat{F}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{x \leq t} f(x) dx e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_{x \leq t} e^{-int} dt f(x) dx =$$

$$\frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [e^{-inx} - (-1)^n] dx = \frac{1}{in} \hat{f}(n) - 2\pi$$

אם $f \in C^1(\mathbb{T})$ אז $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$ וכן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$

אם $f \in C^k(\mathbb{T})$ אז $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n^k})$ וכן $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$

אם $f \in C^k(\mathbb{T})$ אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$ וכן $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n^k})$

אם $f \in C^k(\mathbb{T})$ אז $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$ וכן $\hat{f}(n) = o(\frac{1}{n^k})$

קונבולוציה

$$f, g \in L_1(\mathbb{T}) \quad \text{אז} \quad f * g \in L_1(\mathbb{T}) \quad \text{וכן} \quad \hat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \quad \text{וכן} \quad \|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$$

$$\hat{f * g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-inx} dx \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{iny} dy = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$$

אם $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ אז $f * g \in L_1(\mathbb{T})$ וכן $\hat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$

אם $f, g \in L_1(\mathbb{T})$ אז $f * g \in L_1(\mathbb{T})$ וכן $\hat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n)$

$$(f * g) * h(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w) g(w-z) h(z) dz dw =$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w) \int_{-\pi}^{\pi} h(z) g(w-z) dz dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-w) (g * h)(w) dw = (f * (g * h))(t)$$
 אכן L_1 גלגל קונבולוציה בייחס אקונומולוציה. [כזכר לא ודאט $(f * g)(x) = g * (f * g)$ אבל זה ברור].
 נשיא אב שגן יחידה (פונקציות דלתא) גמורה אלויות אבל היא אב באמת פונקציה.
דואליות (פשוטות) אקונומולוציה
 פרו בא מברוא קונבולוציה ופרס לא...

1. $g(x) = e^{inx}$ אב f הזורה $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(y) dy$ אז $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx-y} f(y) dy = e^{inx} \hat{f}(n)$
2. $g(x) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx}$ אז $(f * g)(x) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{inx} \hat{f}(n)$
3. $h = \delta = \frac{1}{2\pi} \chi_{[-\pi, \pi]}$ אז $(f * h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy$

משפט

1. אם $\varphi \in C(\mathbb{T})$ ו- $f \in L_1(\mathbb{T})$ אז $f * \varphi \in C(\mathbb{T})$
 2. אם $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ ו- $f \in L_1(\mathbb{T})$ אז $f * \varphi \in C^1(\mathbb{T})$ ו- $(f * \varphi)' = \varphi' * f$
- הוכחה ראשית נשיא אב שבחברה $\varphi \in C(\mathbb{T})$ הקונבולוציה מוגדרת היטב אב x
 ולא צריך פוקצי - φ רציפה ובפרט חסומה אכן $(\varphi * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-y) f(y) dy$
 כזר, $(\varphi * f)(x+\Delta) - (\varphi * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\varphi(x+\Delta-y) - \varphi(x-y)] f(y) dy$
 וזו פונקציה אינטגרלית (פוקצי φ חסומה) וממשל אב זה מתכנס ל-0.

הוכחה של 2 במצב זהה -

$$\frac{[(\varphi * f)(x+\Delta) - (\varphi * f)(x)]}{\Delta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(x+\Delta-y) - \varphi(x-y)}{\Delta} f(y) dy$$
 וזה אינא אב למצב $\Delta \rightarrow 0$ $\left| \frac{\varphi(x+\Delta-y) - \varphi(x-y)}{\Delta} \right| \leq \max_{t \in [-\pi, \pi]} |\varphi'(t)|$
 אכן אב משפט אב יש התכנסות
 של האינטגרל ל- $(\varphi' * f)(x)$.

בפרט, אפשר לקבא אינדוקטיבית $\varphi \in C^k(\mathbb{T}) \Leftrightarrow (f * \varphi) \in C^k(\mathbb{T})$ אב $f \in L_1(\mathbb{T})$
השורה סדרה $k \in L_1(\mathbb{T})$ נקראת יחידה אמרוקטמטיבית אם:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t) dt = 1$, אב n
 $f * k_n \xrightarrow{L_1} f$ [אב $f \in L_1$]
2. הסדרה חסומה במיש בנורמא L_1 : $\sup_n \|k_n\|_{L_1} < \infty$ אב $k \in L_1$ אב $f \in C(\mathbb{T})$ אב $f * k_n \rightarrow f$ במיש.
3. אב $\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| dt \rightarrow 0$ כ- $n \rightarrow \infty$ מתקיים

דוגמא ראנו כקר מספר דואליות -
 $k_n = \frac{1}{2\pi} \chi_{[-\pi/n, \pi/n]}$ כאשר $0 \leq \sigma_n \leq \frac{1}{n}$ באופן כללי.
 $\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| dt = 1$ אב $\int_{-\pi}^{\pi} |k_n(t)| dt \rightarrow 0$ כ- $n \rightarrow \infty$
 $f * k_n \xrightarrow{L_1} f$ אב $f \in L_1$
 φ_{σ_n} קואמה כאשר $0 \leq \sigma_n \leq \frac{1}{n}$
 ערצין כיר - $\sigma_n(x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}$
 משולל $\frac{1}{N+1} \left[\frac{\sin(\frac{N+1}{2}x)}{\sin \frac{x}{2}} \right]^2$