

אנליזת הרמוניות

הפרק הקודמת הזכרנו אופרטורים $(Mf)(x) = xf(x)$ ו $(\frac{d}{dx}f)(x) = f'(x)$ וזוהי

$$L = D^2 - M^2 \quad \text{מרחב} \quad L = \tilde{L} - \tilde{M}^2 \quad \text{אין זכור אבדוק סקטור}$$

על L מתרן צריך להיות $f(x) = w(x) e^{-x^2/2}$ נצורה

מה w צריך לקיים? $f''(x) = w''(x) e^{-x^2/2} - 2xw'(x) e^{-x^2/2} + w(x) x^2 e^{-x^2/2}$

$$w(x) [x^2 e^{-x^2/2} - 2xw'(x) e^{-x^2/2} + w''(x) e^{-x^2/2}]$$

אכן $e^{x^2/2} Lf = w'' - 2xw' - x^2w = w'' - 2xw' - w$

נצבה שיתקיים $w'' = 2xw' + (\lambda + 1)w$, ופתרון זה פולינום $\sum_{k=0}^n C_k x^k$

צריך להתקיים $\sum_{k=0}^{n-2} x^k [C_{k+2} (k+2)(k+1) - 2C_k \cdot k - (\lambda + 1)C_k] -$

$$x^{n-1} [C_{n-1} (n-1) \cdot 2 + (\lambda + 1)C_{n-1}] - x^n [2C_n + (\lambda + 1)C_n] = 0$$

על לקחת $C_n = 0$ וזה נקרא $2n+1 + \lambda = 0$, כלומר $\lambda = -(2n+1)$

$C_k = \frac{C_{k+2} (k+2)(k+1)}{2k+1 + \lambda} = -C_{k+2} \frac{(k+2)(k+1)}{2(n-k)}$ ונקרא נוסחת

נקרא $\lambda_n f_n = L f_n$ עבור $\lambda_n = -(2n+1)$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, -1

$f_n(x) = P_n(x) e^{-x^2/2}$, פולינום הרמי P_n $n=0, 1, 2, \dots$

נכתוב מקדמים ראשוניים: $P_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{32} x^{n-4} - \dots$

מה אנחנו צריכים? $f, g \in \mathcal{S}$ נקרא

$$\langle Lf, g \rangle = \int f'(x) \cdot \overline{g'(x)} dx - \int x^2 f(x) \overline{g(x)} dx = \int f(x) \overline{g'(x)} dx - \int f(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, M^2 g \rangle$$

$$\int f(x) \overline{g'(x)} dx = \langle f, M^2 g \rangle = \langle f, Lg \rangle$$

מסקנה: $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ אורתונורמלי. הוכחה: $\langle f_n, f_m \rangle = \langle f_n, Lf_m \rangle = \lambda_m \langle f_n, f_m \rangle$

אם $\lambda_n \neq \lambda_m$ אכן $\langle f_n, f_m \rangle = 0$

טענה $\{f_n\}$ וזו על $\tilde{\mathcal{S}}$

הוכחה $E = \text{span}\{f_0, \dots, f_n\}$ זה בדיוק מרחב פולינומים מדרגה $\leq n$, על $e^{-x^2/2}$

נשן $E_n \subseteq E_{n+1}$ מספיק לבדוק על $f_n(x) e^{-x^2/2}$ ב E_n

אכן $\tilde{L}(x^n e^{-x^2/2}) = \tilde{L} M^n e^{-x^2/2} = (-i)^n \tilde{L} e^{-x^2/2} = (-i)^n e^{-x^2/2}$

סיקור זה $e^{-x^2/2}$ פונקציה עצמית. נבדוק

מכל סדר n זה פולינום ממעלה n בקו, כנדרש

כעת נגדיר $L_n = L|_{E_n}$, $\tilde{L}_n = \tilde{L}|_{E_n}$ ב E_n מרחב

סוף מימדי $\mathcal{F}_n$ אופרטור סימטר ולכן ניתן לכססו $f_0, \dots, f_n$ ו"ר
 ברכה (מגנטרופיק) ולכן ו"ר מקרון צד קאורט וטול אהם, $\mathcal{F}_n$
 אם נסמן $g_n = \mathcal{F}_n f_n$ אז $g_n = \mathcal{F}_n L f_n = \lambda_n \mathcal{F}_n f_n = \lambda_n g_n$
 ולכן ו"ר זה עדין מתקין, $g_n = C \cdot f_n$ ו-1 כח קורס. מתקין?
 $\mathcal{F}_n f_n = i^n D^n (e^{-x^2/2})$ מה צריך להיות C?
 ויש מקדמ סותר $C = (-i)^n$, ע"צ זה $\{ \pm i, \pm 1 \}$ (אכן, נבחר לא אופרטור
 הסוק אפשר לשים לב ש- $(I = \mathcal{F}^4)$. האם יש חזר ו"ר? נסיה שלא:

צדף בסיס אורתונורמלי של ת"מ צפוף ב- L_2 .
משפט נדיר $f, f^* \in L_1$, $\int f(x) e^{-ixz} dx \in A$ (על z מוגדר)
 אז $\frac{f(z+w) - f(w)}{w} =$ נגדיר $\delta = |Im z| < \epsilon$, ϵ קטן $\delta = \epsilon$ אז

$$\frac{f(z+w) - f(w)}{w} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ix(z+w)} - e^{-ixw}}{w} dx$$

והאינטגרנד חסום כח"ש ע"כ $\leq |f(x)| \cdot |e^{-ixz} - e^{-ixw}| / |w|$
 $\leq |f(x)| \cdot |e^{-ixz} - e^{-ixw}| / |w| = \left| \frac{e^{iwx} - 1}{wx} \right| = \left| \frac{e^{iwx} - 1}{w} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|w|^n}{n!} = e^{|w|}$
 $F(w) \leq |f(x)| |w| e^{|w|} \leq C |f(w)| e^{|w|}$ ולכן $e^{|w|} = e^{|w|} \leq e^{\epsilon |w|}$

דבור $\infty < e^{-\epsilon |w|} \sup C$. לפי התכונות של f אנו יכולים
 זה איננו של פונקציה אנליטית ולכן אנליטית.

משפט פולינומי הדמי זו מציבה שלה ב- L_2 .

הוכחה ניקח $e^{-x^2/2} \perp h$ אם h נגזיר $\int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-x^2/2} e^{-ixz} dx = \hat{h}(z)$ ונבדוק
 שזו פונקציה שלה. נבדוק ש- $e^{-x^2/2} \in L_2$ ונבדוק את תנאי

המשפט: אם סגור $(e^{-x^2/2} e^{-ixz})_{z \in \mathbb{R}}$ מה הנכחה?
 $\frac{d^n}{dz^n} \hat{h}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-x^2/2} (-ix)^n e^{-ixz} dx = 0$ ולכן $\hat{h} \equiv 0$ ולכן $\hat{h} \equiv 0$ כולל -

$\psi \in L_2$ המשפט היחידות נסיק $\psi \equiv 0$ ולכן $h \equiv 0$ כנראה
 אכן L_2 מתפרק לכסס של 4 מרחבים אורתונורמליים: $\ker(F - I(-1)^k)$
 ו- $\{ \pm i, \pm 1 \}$

סלקציות הרמוניות קבצי מישור

נרצה למצוא $u(x,y)$ - סגור $x \in \mathbb{R}$, כך ש- $u \in C^2$
 עם $u(x,0) = f(x) \in L_2$ נראה ו- $\Delta u = 0$. נרצה פתרון $u(x,y) \in L_2$

1. נניח $v(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\xi x} dx$ ונכתוב $a = \xi$ קבוע נוסח $\varphi(y) = v(\xi, y)$ אז
 3. ח"ק אחת ק"מ $0 = \widehat{\sigma}_x \Delta u = (-i\xi)^2 \widehat{\sigma}_x u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \widehat{\sigma}_x u = -\xi^2 v + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
 4. $\frac{d^2}{dy^2} \varphi(y) = a^2 \varphi$ פתרונות $C_1 e^{ay} + C_2 e^{-ay}$ אבל $C_1 = 0$ כי
 אחרת התבססות ח"ק"פ אקדח מקדח שלילי $C \cdot e^{-|a|y}$.

נקבל $v(\xi, y) = C(\xi) e^{-|\xi|y}$ וכן $C(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ אז $v(\xi, y) =$

נחשב: $u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi$ כלומר $\widehat{f}(\xi) e^{-|\xi|y}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|y} e^{i\xi x} d\xi = \int_0^{\infty} e^{-(ix-y)\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{(ix+y)\xi} d\xi = \frac{-1}{ix-y} + \frac{1}{ix+y} = \frac{-2y}{-x^2-y^2} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

אכן $e^{-|\xi|y}$ זה טרנספורם פורייה של הפונקציה הזו.
 נשים תשובה בקיצור הבא.