אנליזה הרמונית

בשבוע שעבר ראינו שלכל $f,g \in S \subseteq L_2$ אפשר להגדיר $\mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$
שמשמר מכפלה פנימית (איזומטריה של מרחב הילברט) ולכן ניתן
להרחבה לכל L_2.

טענה אם $f \in L_2^k(\mathbb{R})$ אז מתקיימת נוסחה $\mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$

הוכחה נו, לפי הגדרה על S. נקרב את f בעזרת k_n
יחידה אפרוקסימטיבית, C^∞ עם תומך קומפקטי (ראינו כיצד
לבנות פונקציה כזו). נגדיר $f_n = k_n * f \in C_k^\infty(\mathbb{R})$, נתמכות
קומפקטית (בפרט ב-S).
לכן לפי הגדרה $(\mathcal{F}f_n)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)e^{-ix\xi}dx \; (= \hat{f_n})$.
כעת $f \in L_2(\mathbb{R})$ ו- k_n יחידה אפרוקסימטיבית ולכן $f_n = f * k_n \xrightarrow{L_2} f$
אבל f גם ב-L_1 ולכן $f_n = f * k_n \xrightarrow{L_1} f$, אפשר לקבל קירוב
שהוא טוב ב-L_2 וגם ב-L_1. לפי הגדרה $\mathcal{F}f = \lim_{N\to\infty}^{L_2} \mathcal{F}f_n$.
נסמן $g_n = \mathcal{F}f_n$ $f_n \to f$ ב-L_1 ולכן g_n מתכנסות
במידה שווה, ונוכל להחליף גבול ואינטגרל.

~~אם f לא נתמכת קומפקטית נוכל לקחת $f_M := \chi_{[-M,M]}$ במקום,~~
~~ולכן טענה קודמת~~

משפט (פלנשרל) לכל $f \in L_2(\mathbb{R})$ $\mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}^{L_2}\int_{-N}^{N} f(x)e^{i\xi x}dx$, $\mathcal{F}^* g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}^{L_2}\int_{-N}^{N} g(\xi)e^{i x\xi}dx$

הוכחה נגדיר ל-$N>0$ $f_N = \chi_{[-N,N]} f \in L_2^k$ ו- $f_N \to f$ [illegible]
במשפט הקודם ל-f_N נקבל את הדרוש
חלק שני, $\mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} g(\xi)e^{i\xi x}dx$ ונוכל לשחזר מה שעשינו קודם. באופן:

$$\langle f, \mathcal{F}^* g\rangle = \langle \mathcal{F}f, g\rangle = \lim_{M,N\to\infty}\int_{-M}^{M} d\xi\, g(\xi)\int_{-N}^{N} f(x)e^{ix\xi}dx =$$

$$\lim_{M,N\to\infty}\int_{-N}^{N}dx\, f(x)\cdot\int_{-M}^{M} g(x)e^{-ix\xi}d\xi$$

משפט (פלנשרל) II $(\mathcal{F}f)(\xi) \overset{a.e.}{=} \frac{d}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\xi x}-1}{-ix}f(x)dx$.

הוכחה נגדיר פונקציית עזר $g(\xi) = \chi_{[0,t]}(\xi)$. נתבונן ב- $\langle \mathcal{F}f, g\rangle$.

דרך 1 לפי הגדרה זה שווה $\langle f, \mathcal{F}^* g\rangle = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{i\xi x}d\xi\rangle =$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, \int_0^t e^{ix\xi}d\xi\rangle = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ixt}-1}{ix}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ixt}-1}{-ix}$$

דרך 2 זה לפי הגדרה $\langle \mathcal{F}f,g\rangle = \int_0^t (\mathcal{F}f)(\xi)\,d\xi$

לפי משפט לבג זו פונקציה גזירה כמעט בכל מקום,

ונגזרת $\frac{d}{dt}$ שווה $\mathcal{F}f$.

עכשיו יש לנו אופרטור אוניטרי $\mathcal{F}:L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$. מה אנחנו הכי אוהבים לעשות ~~[illegible]~~ בעולם? לחשב ספקטרום של אופרטור כזה!

ניקח אופרטורים (עוד 2, נאמר) אופרטור הגזירה $D: f \mapsto \frac{d}{dx}f$

ואופרטור של כפל ב-x $M: f \mapsto x\cdot f(x)$. אז ראינו $\mathcal{F}Df = iM\mathcal{F}f$

ו- $\mathcal{F}Mf = -iD\mathcal{F}f$. מה כשעושים פעמיים? נקבל $\mathcal{F}D = iM$, $\mathcal{F}M = -iD$

לכן $\mathcal{F}M^2 = -D^2\mathcal{F}$, $\mathcal{F}D^2 = -M^2\mathcal{F}$. נגדיר אם כן $L = D^2 - M^2$, אז

$\mathcal{F}L = -M^2\mathcal{F} - (-D^2\mathcal{F}) = L\mathcal{F}$. אופרטורים מתחלפים, אבל L הרבה יותר

פשוט. נחשב ספקטרום שלו ונקבל חינם ספקטרום של $\mathcal{F}$