W7D3
5/5/15

אנליזה הרמונית

בפעם שעברה ראינו קונבולוציה של $f\in L_1, g\in L_p$, ושל $f\in L_1^{loc}$, $\varphi\in L_1^k$ (תומך קומפקטי).
כאשר $\varphi\in C_k^m$ ($\varphi\in C^m$ עם תומך קומפקטי), לכל $f\in L_1$
מקיים $f*\varphi\in C^m$. ההוכחה דומה. בפועל צריך רק הסימות במ"ש של הפונקציה
וכל הנגזרות $\varphi', \dots, \varphi^{(m)}$.

<u>מסקנה</u> אותו דבר נכון גם ל- $f\in L_1^{loc}$.

<u>הוכחה</u> כמו קודם, לכל $R>0$ כך ש- $\mathrm{supp}\,\varphi\subseteq[-R,R]$ ולכל $x\in[-R,R]$
מתקיים $(\varphi*f)(x)=(\underset{C_k^m}{\varphi}*\underset{L_1}{f^{2R}})(x)$, ולכן פונקציה $\overbrace{\text{גזירה}}^{m\text{ פעמים ברציפות}}$ ב- $(-R,R)$.

<u>יחידה אפרוקס׳</u>

בניה כללית - $\underset{\lambda\to\infty}{k_\lambda(x)=\lambda\varphi(\lambda x)}$ עם $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$

<u>מסקנה</u> C_k^∞ צפוף ב- L_p, לכל $1\le p<\infty$.

<u>הוכחה</u> נגדיר $\psi(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}\in C^\infty$, $\psi_0(x)=\psi(x+1)\psi(1-x)\in C^\infty$ נתמך
על $[-1,1]$, $k_\lambda(x)=\lambda\psi_0(\lambda x)$ יח׳ אפרוקס׳. ע״י קונבולוציה
עם $f\in L_p^k\subseteq L_1$ נקבל פונקציה C^∞ עם תומך קומפקטי,
ונוכל לקרב כך ב- L_p כל פונקציה <u>עם תומך קומפקטי</u>.
מה ל- f כללית? L_p^k <u>צפוף</u> ב- L_p - $f^a\xrightarrow[a\to\infty]{L_p}f$.

<u>מסקנה</u> S צפוף ב- L_p.

<u>משפט</u> $H\in L_1$, $h(x)=\int H(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ ב- L_1. אז לכל $f\in L_1$
מתקיים $(f*h)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)\hat f(\xi)e^{ix\xi}d\xi$.

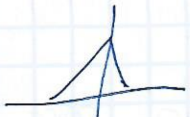
<u>הוכחה</u>
$$(f*h)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)e^{iy\xi}d\xi\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)H(\xi)e^{iy\xi}d\xi\,dy\underset{\text{Fubini}}{=}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,H(\xi)e^{ix\xi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,f(x-y)e^{i(y-x)\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi)\hat f(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

<u>סכימה של ט׳ פוריה</u>

<u>משפט</u> נניח $H\in L_1$, $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int H(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ אינטגרבילית ואינטגרל 1.
אז לכל $f\in L_1$, $f\overset{L_1}{=}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\frac{\xi}{\lambda})\hat f(\xi)e^{ix\xi}d\xi$.

<u>הוכחה</u> נגדיר $\varphi_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int H(\frac{\xi}{\lambda})e^{ix\xi}d\xi$, כלומר $\varphi_\lambda(x)=\lambda\varphi(\lambda x)$ יחידה אפרוקס׳.
לכן $f*\varphi_\lambda\xrightarrow{L_1}f$ וממשפט קודם $f*\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\xi/\lambda)\hat f(\xi)e^{i\xi x}d\xi$

דוגמאות לגרעין H



גרעין Fejér – $H(\xi)=(1-|\xi|)_+$.

אז $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(1-|\xi|)e^{i\xi x}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}(1-\xi)\cos\xi x\,d\xi=\frac{1}{\pi}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=\frac{1}{2\pi}\frac{2\sin^2(x/2)}{2(x/2)^2}$ נקראת גרעין פ"ר.

אי שלילית ומקיימת $\overbrace{\text{תנאי דיני}}^{\text{בכל מקום}}$ ולכן $\hat\varphi=(1-|\xi|)_+$, ובפרט $\hat\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx=1$

וזו יחידה אפרוקסימטיבית.

מסקנה לכל $f\in L_1$, $\int_{-\infty}^{\infty}(1-\frac{|\xi|}{\lambda})_+\hat f(\xi)e^{i\xi x}d\xi \xrightarrow{L_1} f$

דוגמה 2: $H(\xi)=\frac{e^{-|\xi|}}{2\pi}$ אז $\varphi=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\geq 0$ ושוב $H=\hat\varphi$ (דיני).

זה גרעין פואסון P, ו- $P_\lambda=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{1+(\lambda x)^2}$

דוגמה 3 $\varphi=\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, $H=\hat\varphi=e^{-x^2/2}$ (שוב לפי דיני).

פורייה ב-L_2

אם $f\in S$ אז $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\hat f(\xi)e^{i\xi x}d\xi$. $\hat f\in S$ ובפרט ב-L_1, ולכן לכל
$g\in L_1$, $(f*g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\xi)\hat g(\xi)e^{i\xi x}d\xi$. בפרט כאשר $f,g\in S$, $x=0$,
נקבל $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g(-y)dy=(f*g)(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(\xi)\hat g(\xi)d(\xi)$. נסמן $h(y)=\overline{g(-y)}$ אז
$\hat g(\xi)=\overline{\hat h(\xi)}$. נקבל $\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\overline{h(y)}dy=\frac{1}{2\pi}\int\hat f(\xi)\overline{\hat h(\xi)}d\xi$. נגדיר טרנספורמציה מ-$S\subseteq L_2$
לעצמו ע"י $f\xmapsto{\mathcal F}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat f$. אז $\langle f,g\rangle=\langle\mathcal Ff,\mathcal Fg\rangle$. בפרט ל-$f=g$
$\|f\|_2=\|\mathcal Ff\|_2$. לכן $\mathcal F$ אופרטור חסום (איזומטריה) על תת מרחב
צפוף $S\subseteq L_2$, וניתן להרחבה באופן יחיד לאופרטור חסום בכל
L_2 שגם נקרא $L_2\xrightarrow{\mathcal F}L_2$. זה נקרא אופרטור פורייה.

זה הספר, אבל צריך נוסחה... בפרק הבא.