

3/5/15

נוסחה אם g היא פונקציה על קטבולוציה:

יש מידה כי $\mathbb{R}$ לא קומפקטית...

הצגה נניח f, g מדידות. נגיד שהקטבולוציה f^* מוגדרת

אם כמחל אלו x - $f(x-y)g(y)$ אינטגרלית. במצב כזה

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy$$

בהיפוך כאשר $f \in L_p$ ו- $g \in L_q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

זה המצב אם יש האדרה: $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. תרגיל

בר (כשול): אלוהיה שהקטבולוציה וזיהיה במצב כזה.

טענה $f \in L_1$, $g \in L_1$ אז קטבולוציה מוגדרת, $f * g \in L_1$ ו-

$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. [זו מסקנה במחל מידות ממקובסין]

הוכחה נבחר $A > 0$ גדול מספיק. נחשבון $\int_{-A}^A \left(\int_{-A}^A |f(x-y)g(y)| dy \right) dx$ סופית

זו מידה סופית נשתמש במצב קובסין:

$$\int_{-A}^A \left(\int_{-A}^A |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \leq \int_{-A}^A \left(\int_{-A}^A |f(x-y)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{-A}^A |g(y)|^q dy \right)^{1/q} dy$$

ניקח $\sup_A$ ונקבל:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

ואכן הקטבולוציה בהיפ מוגדרת היא ומק"מית לזה הדרוש.

היא בהיפ מקימה $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

ואכן $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ ובהיפ $f * g \in L_1$

כזה, k_x יחידה אפרוקסימטית אם $\int_{-\infty}^{\infty} k_x(x) dx = 1$ ו- $\int_{-\infty}^{\infty} |k_x(x)| dx \leq M < \infty$

אילו סדר, $\int_{-\infty}^{\infty} |k_x(x)| dx \rightarrow 0$

משפט $f \in L_p(\mathbb{R})$ ו- k_x יחידה אפרוקסימטית אז $k_x * f \rightarrow f$ ב- L_p .

הוכחה כמחל זהה למה שהיה לא המוצא. נוכיח $\|k_x * f - f\|_p \rightarrow 0$.

$\|k_x * f - f\|_p \leq$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |k_x(y)| |f_y(x) - f(x)| dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |k_x(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f_y(x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} dy$$

אם בוחרים δ קרוב מספיק אפילו.

תרגיל $f \in C(\mathbb{R})$ חסומה במ"ש ורציפה במ"ש אז $k_x * f \rightarrow f$ במ"ש.

הצגה f מדידה, כאשר שהי אינטגרלית מקומית אם $A > 0$,

$f \in L_1[-A, A]$ (במצב, זה כל קבוצה קומפקטית).

ϕ קומפקט (נתמכת קומפקטית) כל ק"ר A כך שכל ϕ $\phi(x)=0, |x| > A$

אם נותן $f^A = \chi_{[-A,A]} \cdot f$

הערה $f \in L^1_{loc}$

אם $f \in L^1_{loc}$ קומפקטית

$$(\phi * f)(x) = (\phi * f^{R+1})(x), \quad x \in [-R, R], \quad R > 0$$

הוכחה טריוויאלית.